

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

**DETERMINACIÓN DE LA CARGA DE INICIO DE
AGRIETAMIENTO Y TRAYECTORIAS DE
PROPAGACIÓN EN SISTEMAS DE LOSAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

P R E S E N T A:

ERICK DE LA PAZ MORALES

Tutor

DR. GELACIO JUÁREZ LUNA

México, D.F 2016

Agradecimientos

Primeramente doy infinitamente gracias a Dios, por haberme dado fuerza y valor para terminar mis estudios de Maestría.

A mi madre, que desde que era un niño, ha creído en mi capacidad para salir adelante, que siempre me ha brindado su apoyo incondicional, y que además ha sido un gran ejemplo en mi vida.

A mi esposa y mi hija que son mi razón de vivir, y por comprender mi ausencia en los momentos difíciles que se derivaron de este periodo de estudio y por mostrarme su apoyo incondicional

A mi asesor de tesis el Dr. Gelacio Juárez Luna, por su acertada guía e innumerables aportaciones a este trabajo. También, aprovecho para expresar la motivación que de él se derivó por su ejemplo y dedicación.

Al Dr. Alonso Gómez Bernal y el Dr. Dante Tolentino López, por su amable ayuda en la revisión de esta tesis y sus acertados comentarios.

A todos los profesores del posgrado en Ingeniería estructural de la UAM-Azcapotzalco, por todas sus enseñanzas y que sin duda me serán de gran utilidad en mi ámbito profesional.

A la coordinación del posgrado, en un principio dirigida por el Dr. Arturo Tena Colunga y posteriormente dirigida por el Dr. Gelacio Juárez Luna por su gran apoyo.

Por último, agradezco sinceramente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado en este proceso, y al área de estructuras de la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Azcapotzalco por ofrecer una educación de calidad que me ha permitido desarrollarme como persona y como profesional.

Índice

Resumen	x
1 Introducción.....	1
1.1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.2 ANTECEDENTES.....	1
1.3 OBJETIVO	5
1.3.1 General	5
1.3.2 Particulares.....	5
1.4 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS.....	5
2 Métodos para determinar las cargas de inicio de agrietamiento y última en losas	7
2.1 LÍNEAS DE FLUENCIA	7
2.1.1 Método de equilibrio de secciones.....	8
2.1.2 Método del trabajo virtual.....	9
2.1.2.1 Trabajo externo	10
2.1.2.2 Trabajo interno	11
2.2 ESFUERZOS PRINCIPALES	12
2.3 MECÁNICA COMPUTACIONAL.....	14
2.3.1 Construcción de los modelos.....	14
2.3.2 Tipos de elementos utilizados.....	16
2.3.2.1 Elemento Solid65	16
2.3.2.2 Elemento Link8.....	17
3 Modelado de sistemas de losas	18
3.1 LOSA MACIZA	18
3.1.1 Curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa	20
3.1.2 Deformaciones en el acero de refuerzo	21
3.1.3 Trayectorias de agrietamiento	25
3.1.4 Análisis elásticos en SAP2000	28
3.1.5 Análisis por el método de las líneas de fluencia	30
3.1.6 Comparación de resultados	31
3.1.7 Discusión.....	32
3.2 LOSA ENCASETONADA	32
3.2.1 Curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa	37
3.2.2 Deformaciones en el acero de refuerzo	37
3.2.3 Trayectorias de agrietamiento	39
3.2.4 Análisis elásticos en SAP2000	42
3.2.5 Comparación de resultados	43
3.2.6 Discusión.....	43
3.3 LOSA MACIZA CON UN MURO APOYADO SOBRE ELLA	44
3.3.1 Curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa	50
3.3.2 Deformaciones en el acero de refuerzo	51
3.3.3 Trayectorias de agrietamiento	54
3.3.4 Análisis elástico en SAP2000.....	56

3.3.5	<i>Análisis por el método de las líneas de fluencia</i>	59
3.3.6	<i>Comparación de resultados</i>	60
3.3.7	<i>Discusión</i>	60
4	Formulación matemática para determinar la carga de inicio de agrietamiento	62
4.1	LOSA MACIZA	62
4.1.1	<i>Eje neutro y momento de inercia al centro de la losa</i>	63
4.1.2	<i>Eje neutro y momento de inercia en los bordes simplemente apoyados</i>	64
4.1.3	<i>Eje neutro y momento de inercia en los bordes empotrados</i>	66
4.1.4	<i>Carga de inicio de agrietamiento</i>	66
4.1.5	<i>Discusión</i>	67
4.2	LOSA ENCASETONADA	68
4.2.1	<i>Eje neutro y momento de inercia al centro de la losa</i>	68
4.2.2	<i>Carga de inicio de agrietamiento</i>	69
4.2.3	<i>Discusión</i>	69
4.3	LOSA MACIZA CON UN MURO APOYADO SOBRE ELLA	70
4.3.1	<i>Eje neutro y momento de inercia al centro de la losa</i>	70
4.3.2	<i>Eje neutro y momento de inercia en el borde empotrado</i>	71
4.3.3	<i>Carga de inicio de agrietamiento</i>	71
4.3.4	<i>Discusión</i>	72
4.4	COMPARACIÓN DE RESULTADOS	72
4.4.1	<i>Losa maciza</i>	72
4.4.2	<i>Losa encasetonada</i>	73
4.4.3	<i>Losa maciza con muro apoyado sobre ella</i>	73
5	Conclusiones y Recomendaciones	74
5.1	CONCLUSIONES	74
5.2	RECOMENDACIONES	75
5.3	TRABAJOS FUTUROS	75
A	ANEXO A: Método de las líneas de fluencia en losas macizas	77
A.1	LOSA CUADRADA SIMPLEMENTE APOYADA	77
A.1.1	<i>Método de equilibrio de secciones</i>	78
A.1.2	<i>Método del trabajo virtual</i>	79
A.1.2.1	Trabajo externo realizado por las cargas	79
A.1.2.2	Trabajo interno realizado por los momentos resistentes	80
A.2	LOSA CUADRADA EMPOTRADA	81
A.2.1	<i>Método de equilibrio de secciones</i>	82
A.2.2	<i>Método del trabajo virtual</i>	83
A.2.2.1	Trabajo externo realizado por las cargas	83
A.2.2.2	Trabajo interno realizado por los momentos resistentes	83
A.3	LOSA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA	83
A.3.1	<i>Método de equilibrio de secciones</i>	84
A.3.2	<i>Método del trabajo virtual</i>	87
A.3.2.1	Trabajo externo realizado por las cargas	87
A.3.2.2	Trabajo interno realizado por los momentos resistentes	87
A.4	LOSA RECTANGULAR EMPOTRADA	89

A.4.1	<i>Método de equilibrio de secciones.....</i>	90
A.4.2	<i>Método del trabajo virtual.....</i>	91
A.4.2.1	Trabajo externo realizado por las cargas	91
A.4.2.2	Trabajo interno realizado por los momentos resistentes	92
B	<i>ANEXO B: Método de las líneas de fluencia en la losa maciza con un muro apoyado sobre ella</i>	93
B.1.1	<i>Método del trabajo virtual.....</i>	94
B.1.1.1	Trabajo externo realizado por las cargas	94
B.1.1.2	Trabajo interno realizado por los momentos resistentes	95
C	Referencias	97

Lista de figuras

Figura 1.1 Distribución de esfuerzos considerando el acero de refuerzo	4
Figura 2.1 Configuraciones de líneas de fluencia para losas (adaptada de Nilson A. 1999) .	8
Figura 2.2 Equilibrio de momentos de una porción de una losa cuadrada en dos direcciones con carga uniformemente distribuida	9
Figura 2.3 Configuración deformada de una losa cuadrada en dos direcciones con carga uniformemente distribuida, de la cual se calcula el trabajo externo.....	10
Figura 2.4 Configuración deformada de una losa cuadrada en dos direcciones con carga uniformemente distribuida, de la cual se calcula el trabajo interno	11
Figura 2.5 Momentos: a) cartesianos y b) principales (adaptada de Juárez-Luna 2014)	13
Figura 2.6 Elemento Solid65 (adaptada de ANSYS 2013)	17
Figura 2.7 Elemento Link8 (adaptada de ANSYS 2013)	17
Figura 3.1 Vista en planta del armado de las losas: a) cuadrada y b) rectangular.....	19
Figura 3.2 Configuración de los modelos de las losas estudiadas: a) cuadrada y b) rectangular	19
Figura 3.3 Armado y mallado de la losa cuadrada.	20
Figura 3.4 Armado y mallado de la losa rectangular.....	20
Figura 3.5 Modelos en ANSYS: a) cuadrada y b) rectangular	20
Figura 3.6 Curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de las losas: a) cuadradas y b) rectangulares.....	21
Figura 3.7 Franjas analizadas de las losas: a) cuadradas y b) rectangulares	22
Figura 3.8 Deformaciones en el acero de la LCSA, en la franja: a) $a-b$ y b) $b-c$	22
Figura 3.9 Deformaciones en el acero de la LCE, en la franja: a) $a-b$ y b) $b-c$	23
Figura 3.10 Deformaciones en el acero de la LRSA, en la franja: a) $a-b$, b) $a-d$, c) $d-c$ y d) $b-c$	24
Figura 3.11 Deformaciones en el acero de la LRE, en la franja: a) $a-b$, b) $a-d$, c) $d-c$ y d) $b-c$	25

Figura 3.12 Trayectorias de agrietamiento de la LCSA, en la cara: a) inferior y b) superior	26
Figura 3.13 Trayectorias de agrietamiento de la LCE, en la cara: a) inferior y b) superior.	26
Figura 3.14 Trayectorias de agrietamiento de la LRSA, en la cara: a) inferior y b) superior	27
Figura 3.15 Trayectorias de agrietamiento de la LRE, en la cara: a) inferior y b) superior.	27
Figura 3.16 Esfuerzos principales en la LCSA, en la cara: a) inferior y b) superior.....	28
Figura 3.17 Esfuerzos principales en la LCE, en la cara: a) inferior y b) superior	29
Figura 3.18 Esfuerzos principales en la LRSA, en la cara: a) inferior y b) superior.....	29
Figura 3.19 Esfuerzos principales en la LRE, en la cara: a) inferior y b) superior	30
Figura 3.20 Configuración de las líneas de fluencia para la losa: a) cuadrada y b) rectangular	30
Figura 3.21 Comparación de las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de las losas: a) cuadradas y b) rectangulares	31
Figura 3.22 Geometría de la losa encasetonada de: a) 5x5 nervaduras y b) 9x9 nervaduras.	33
Figura 3.23 Detalle del refuerzo para ambas losas encasetonadas	33
Figura 3.24 Configuración de los modelos estudiados: a) 5x5 nervaduras y b) 9x9 nervaduras.....	35
Figura 3.25 Armado y mallado de la losa encasetonada de 5x5 nervaduras	36
Figura 3.26 Armado y mallado de la losa encasetonada de 9x9 nervaduras	36
Figura 3.27 Modelos en ANSYS: a) 5x5 nervaduras y b) 9x9 nervaduras	36
Figura 3.28 Curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa encasetonada de: a) 5x5 nervaduras y b) 9x9 nervaduras.....	37
Figura 3.29 Franjas analizadas	38
Figura 3.30 Deformaciones en el acero de la losa L5x5_V14, en la franja: a) <i>a-b</i> y b) <i>b-c</i>	38
Figura 3.31 Deformaciones en el acero de la losa L9x9_V13, en la franja: a) <i>a-b</i> y b) <i>b-c</i>	39
Figura 3.32 Trayectorias de agrietamiento de la L5x5, en la cara: a) inferior y b) superior	40

Figura 3.33 Comparación de las trayectorias de agrietamiento de la L5x5 en la cara superior: a) experimental (tomada de Hashim y Mohammad 2000) y b) ANSYS.....	40
Figura 3.34 Trayectorias de agrietamiento de la L9x9, en la cara: a) inferior y b) superior	41
Figura 3.35 Comparación de las trayectorias de agrietamiento de la L9x9 en la cara superior: a) experimental (tomada de Hashim y Mohammad 2000) y b) ANSYS.....	41
Figura 3.36 Esfuerzos principales en la L5x5, en la cara: a) inferior y b) superior	42
Figura 3.37 Esfuerzos principales en la L9x9, en la cara: a) inferior y b) superior	43
Figura 3.38 Vista en planta del armado de la losa del espécimen	45
Figura 3.39 Especimen de prueba (adaptada de Vargas O. 2014).....	46
Figura 3.40 Vista lateral del espécimen, cotas en cm (adaptada de Vargas O. En proceso)	46
Figura 3.41 Vista en planta del armado del modelo de la losa	47
Figura 3.42 Configuración de los modelos estudiados: a) SDSL, b) SL y c) CDL.....	48
Figura 3.43 Armado y mallado de los modelos losa-muro de transferencia: a) SDSL, b) SL y c) CDL	49
Figura 3.44 Modelos en ANSYS: a) SDSL, b) SL y c) CDL.....	50
Figura 3.45 Curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa, de los modelos: a) SDSL, b) SL y c) CDL	51
Figura 3.46 Comparación de las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de los modelos de la losa maciza con un muro apoyado sobre ella	51
Figura 3.47 Franjas analizadas	52
Figura 3.48 Deformaciones en el acero debidas a la carga P_a , en la franja: a) $o-c$, b) $o-a$, c) $c-b$ y d) $a-b$	53
Figura 3.49 Deformaciones en el acero debidas a la carga P_u , en la franja: a) $o-c$, b) $o-a$, c) $c-b$ y d) $a-b$	54
Figura 3.50 Trayectorias de agrietamiento: a) cara inferior y b) cara superior	55
Figura 3.51 Trayectorias del primer agrietamiento en cara superior e inferior: a) experimental (tomada de Vargas. 2014) y b) ANSYS	56
Figura 3.52 Trayectorias de agrietamiento cuando falla la losa, en cara superior e inferior: a) experimental (tomada de Vargas. 2014) y b) ANSYS	56

Figura 3.53 Vista en 3D de los modelos, con: a) carga lineal, b) muro de 250 cm y c) muro de 375 cm	57
Figura 3.54 Esfuerzos principales en la losa maciza con carga lineal sobre una longitud de 250 cm: a) cara inferior y b) cara superior	57
Figura 3.55 Esfuerzos principales en la losa maciza con un muro apoyado sobre ella y con una longitud del muro de 250 cm: a) cara inferior y b) cara superior	58
Figura 3.56 Esfuerzos principales en la losa maciza con un muro apoyado sobre ella y con una longitud del muro de 375 cm: a) cara inferior y b) cara superior	59
Figura 3.57 Configuración de las líneas de fluencia para la losa maciza con un muro apoyado sobre ella	59
Figura 4.1 Sección transversal al centro de la losa.....	63
Figura 4.2 Sección transformada al centro de la losa	63
Figura 4.3 Sección transversal en el borde de la losa	64
Figura 4.4 Sección transformada en el borde simplemente apoyado	65
Figura 4.5 Sección transformada en el borde empotrado	66
Figura 4.6 Sección transversal de la losa.....	68
Figura 4.7 Sección transformada de la losa.....	68
Figura 4.8 Sección transversal al centro de la losa.....	70
Figura 4.9 Sección transversal en el borde empotrado	71
Figura A.1. Vista en planta de la losa cuadrada simplemente apoyada.....	77
Figura A.2. Configuración de las líneas de fluencia propuestas para la losa cuadrada simplemente apoyada	78
Figura A.3 Equilibrio de momentos de uno de los segmentos de la losa cuadrada simplemente apoyada.	78
Figura A.4. Configuración deformada de una porción de la losa cuadrada simplemente apoyada, de la cual se calcula el trabajo externo.....	79
Figura A.5. Configuración deformada de una porción de la losa cuadrada simplemente apoyada, de la cual se calcula el trabajo interno.....	80
Figura A.6. Vista en planta de la losa cuadrada empotrada.	81

Figura A.7. Configuración de las líneas de fluencia propuestas para la losa cuadrada empotrada	81
Figura A.8. Equilibrio de momentos de uno de los segmentos de la losa cuadrada empotrada	82
Figura A.9. Vista en planta de la losa rectangular simplemente apoyada	83
Figura A.10. Configuración de las líneas de fluencia propuestas para la losa rectangular simplemente apoyada	84
Figura A.11. Segmentos de la losa rectangular simplemente apoyada	84
Figura A.12. Equilibrio de momentos del segmento <i>I</i> de la losa rectangular	85
Figura A.13. Equilibrio de momentos del segundo segmento de la losa rectangular	86
Figura A.14. Configuraciones deformadas de las tres porciones de la losa rectangular, de las cuales se calcula el trabajo externo: a) porción <i>I</i> , b) porción <i>2I</i> y c) porción <i>22</i>	87
Figura A.15. Configuraciones deformadas de los dos segmentos de la losa rectangular, de las cuales se calcula el trabajo interno: a) segmento <i>I</i> y b) segmento <i>2</i>	88
Figura A.16. Vista en planta de la losa rectangular empotrada	89
Figura A.17. Configuración de las líneas de fluencia para la losa rectangular empotrada ..	89
Figura A.18. Segmentos de la losa rectangular empotrada	90
Figura B.1 Vista en planta de la losa maciza con un muro apoyado sobre ella	93
Figura B.2 Configuración de las líneas de fluencia propuestas para la losa maciza con muro apoyado sobre ella	93
Figura B.3 Configuraciones deformadas de las dos porciones de la losa maciza con un muro apoyado sobre ella, de las cuales se calcula el trabajo externo: a) porción <i>I</i> y b) porción <i>295</i>	
Figura B.4 Configuraciones deformadas de las dos porciones de la losa maciza con un muro apoyado sobre ella, de las cuales se calcula el trabajo interno: a) porción <i>I</i> y b) porción <i>2 95</i>	

Lista de tablas

Tabla 3.1 Comparación de resultados para las losas macizas	32
Tabla 3.2 Descripción de las versiones realizadas para la losa encasetonada de 5x5 nervaduras.....	34
Tabla 3.3 Descripción de las versiones realizadas para la losa encasetonada de 9x9 nervaduras.....	35
Tabla 3.4 Comparación de resultados para las losas encasetonadas	43
Tabla 3.5 Comparación de las cargas en los modelos estudiados	50
Tabla 3.6 Comparación de resultados para la losa maciza con un muro apoyado sobre ella	60
Tabla 4.1 Cargas de inicio de agrietamiento en losas macizas.....	67
Tabla 4.2 Cargas de inicio de agrietamiento en losas encasetonadas.....	69
Tabla 4.3 Cargas de inicio de agrietamiento en la losa maciza con un muro apoyado sobre ella	72
Tabla 4.4 Comparación de la carga de inicio de agrietamiento en losas macizas.....	73
Tabla 4.5 Comparación de la carga de inicio de agrietamiento en losas encasetonadas.....	73
Tabla 4.6 Comparación de la carga de inicio de agrietamiento en la losa maciza con un muro apoyado sobre ella.....	73
Tabla A.1 Tanteos para diversos valores de x y w_u para la losa rectangular simplemente apoyada.....	89
Tabla A.2 Tanteos para diversos valores de x y w_u para la losa rectangular empotrada	92

Resumen

En la presente tesis se desarrolla una metodología para determinar la carga que ocasiona el agrietamiento en losas cuadradas y rectangulares de concreto reforzado; además se determinan las trayectorias de agrietamiento cuando se someten a carga vertical. Para determinar la carga en la que ocurre el agrietamiento se utiliza el criterio del esfuerzo principal máximo, incluyendo el acero de refuerzo para la distribución de esfuerzos en el espesor de la losa, pues el eje neutro es distinto al geométrico debido a la presencia de los dos materiales. Se estudian losas macizas de concreto reforzado, encasetonadas y una losa maciza con un muro apoyado sobre ella.

Los modelos numéricos se realizan con técnicas avanzadas de elementos finitos de losas en el software ANSYS. Se utilizan elementos finitos sólidos para discretizar el concreto y elementos tipo barra para el acero de refuerzo, ambos tipos de elementos se conectan en sus nodos. Se utiliza una superficie de daño, con diferentes umbrales en tensión y en compresión para representar el comportamiento constitutivo del concreto, mientras que el endurecimiento del acero de refuerzo se idealiza con una superficie de Von Mises.

Además se determinan las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de las losas, deformaciones en el acero de refuerzo y la carga última, esta última se compara con la obtenida con el método de líneas de fluencia.

En losas de concreto reforzado, las trayectorias de agrietamiento son dependientes de las condiciones de apoyo y de la configuración de las cargas aplicadas.

En losas macizas con carga uniformemente distribuida: cuando se encuentran empotradas, el agrietamiento inicia en los bordes de la parte superior, posteriormente en el centro de la parte inferior. En losas simplemente apoyadas, el agrietamiento inicia en la cara inferior de la losa, al centro, propagándose hacia los bordes.

En losas de transferencia, que se encuentran empotradas, el agrietamiento inicia en la cara superior y, posteriormente, el agrietamiento se propaga a la cara inferior. El agrietamiento en la cara inferior inicia en el centro de la losa con trayectorias paralelas a la longitud del muro y con trayectorias radiales que salen de los bordes de los castillos, posteriormente estas grietas radiales se propagan hacia las esquinas. Mientras que el agrietamiento en la cara superior se origina en los bordes perpendiculares al muro, y algunas grietas en los bordes de los castillos, posteriormente se propaga hacia los demás bordes de la losa hasta formar un anillo

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1 Introducción

Una losa de concreto reforzado es un elemento estructural plano de suma importancia en la construcción. Puede estar apoyada sobre vigas de concreto reforzado, muros de mampostería, vigas de acero, sobre columnas, etc. Las losas se utilizan para proporcionar superficies planas y útiles.

Los sistemas estructurales de concreto reforzado que utilizan losas se dividen en dos grupos principales: losas planas y losas apoyadas. Las losas planas son aquellas que están apoyadas directamente sobre las columnas sin tener vigas interiores o de borde. Este sistema entró en desuso en la Ciudad de México después del sismo de 1985.

Las losas se diseñan generalmente para cargas que se suponen distribuidas de manera uniforme sobre toda la superficie de la losa. Además existen casos en los que actúan cargas lineales y concentradas como las producidas por un muro que se apoye sobre la losa, por maquinaria, o por vehículos en el caso de losas de puente.

La carga de inicio del agrietamiento y las trayectorias de propagación en sistemas de losas de concreto reforzado es de suma importancia en la ingeniería, pues es deseable que estos queden limitados a valores tales que el funcionamiento en condiciones de servicio sea satisfactorio, ya que el agrietamiento puede facilitar la corrosión del acero de refuerzo además de que este agrietamiento es indicativo que el concreto ha sobrepasado su capacidad resistente.

En losas de concreto reforzado, las trayectorias del agrietamiento son dependientes de las condiciones de apoyo. Cuando las losas se encuentran empotradas, el agrietamiento inicia en los bordes de la parte superior, posteriormente en el centro de la parte inferior. En losas simplemente apoyadas, el agrietamiento inicia en la cara inferior de la losa, al centro, propagándose hacia los bordes. El agrietamiento de la parte inferior de la losa es mayor que el aplastamiento que aparece en la cara superior, debido a la redistribución de esfuerzos y a la poca resistencia a la tensión que tiene el concreto (Juárez Luna y Caballero Garatachea 2014).

1.2 Antecedentes

Hasta el momento se han realizado algunos trabajos sobre el estudio de las cargas de inicio de agrietamiento así como las trayectorias de propagación en sistemas de losas, tales como:

Bauer y Redwood (1987) realizaron un método analítico basado en enfoque del trabajo virtual para la teoría de líneas de fluencia. Este método consiste en el cálculo de la carga de fluencia de una placa, basada en la geometría de un mecanismo de colapso definido por nodos, planos y líneas. Este método fue desarrollado en gran parte por Johansen (1962), el cual se aplica conservadoramente a losas de concreto reforzado.

Hashim y Mohammad (2000) realizaron un estudio experimental de losas encasetonadas de concreto reforzado con nervaduras cuadradas. Las pruebas se llevaron a la falla en ocho modelos con una variación en las dimensiones y en el peralte de las nervaduras. Los resultados de las rigideces torsionales en los intervalos elástico no agrietado y elástico agrietado se compararon con valores predichos obtenidos de tres diferentes métodos (el análisis teórico basado en la teoría de placas, el método del espesor equivalente y el método del módulo de elasticidad efectivo). Estos autores observaron que el método basado en la teoría de placas proporcionó predicciones satisfactorias para el cálculo de la carga última, mientras que el método del espesor equivalente sobreestima las rigideces a torsión y el método del módulo de elasticidad efectivo proporcionó predicciones seguras para el cálculo de la carga última, cercanas a los resultados de las pruebas. La validez del método del “espesor equivalente” fue examinado con la prueba de dos especímenes, donde se concluyó que el comportamiento de la losa encasetonada fue diferente de su losa maciza equivalente, pues la carga última de la losa maciza fue 60% menor que la carga última de la losa encasetonada.

Johnson (2001) examinó la seguridad del método de las franjas para el diseño de losas de concreto reforzado, mediante un sistema automatizado de líneas de fluencia para analizar un total de 14 losas representativas. De este estudio se observó, que para losas rectangulares regulares, el método de las franjas tiende a ser seguro, pero en casos irregulares los diseños son más variables. Este método proporciona resultados similares a los obtenidos a partir de un método de líneas de fluencia tradicional y difieren en menos del 10 %.

Quintas (2003) estudió dos métodos para realizar el análisis de las líneas de fluencia “Método de los momentos normales” y el “Método de los momentos torsionantes”. En el primer método se supone que actúan solo momentos de flexión y fuerzas cortantes sobre la línea de fluencia, mientras que en segundo método, además de los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes, también actúan momentos torsionantes. Obtuvo dos tipos de trayectorias de línea de fluencia, “trayectorias de fluencia correctas” que corresponden a posibles líneas de fluencia, y “trayectorias de fluencia incorrectas” que no corresponden a posibles líneas de fluencia. Encontró que el “Método de los momentos normales” es adecuado para trayectorias de fluencia correctas, mientras que el “Método de momentos torsionantes” se puede aplicar para las trayectorias de fluencia incorrectas si se suman las fuerzas internas en las líneas de fluencia incorrectas con el fin de lograr condiciones de equilibrio.

Akinyele (2011) comparó el método de la teoría de las líneas de fluencia con el método de elementos finitos y el método de la teoría de placas. Los resultados obtenidos para losas en dos direcciones mostraron que el método de líneas de fluencia es muy conservador, mientras que en losas en una dirección los resultados fueron equiparables, dando el método elástico resultados conservadores. Con este estudio se demostró que el método de líneas de fluencia es aceptable, seguro y económico.

Juárez-Luna y Ayala (2014) estudiaron el proceso de evolución del colapso de losas de concreto reforzado sujetos a carga vertical. En los modelos de las losas, el concreto fue discretizado con elementos finitos hexaédricos con discontinuidades embebidas con tres grados de libertad por nodo, mientras que el acero de refuerzo fue discretizado con barras en 3D colocadas a lo largo de los bordes de los elementos sólidos. El acoplamiento de elementos con discontinuidades embebidas y elementos barra mostraron su capacidad para modelar el agrietamiento, lo cual se validó al comparar la curva de la carga contra los desplazamientos entre los resultados numéricos y los reportados en la literatura.

Juárez-Luna y Caballero-Garatachea (2014) determinaron mediante la mecánica del daño continuo, coeficientes de diseño y trayectorias de agrietamiento en losas circulares, elípticas y triangulares. De este estudio se demostró que las trayectorias del agrietamiento son dependientes de las condiciones de apoyo. Cuando las losas se encuentran empotradas, el agrietamiento inicia en los bordes de la parte superior, posteriormente en el centro de la parte inferior. En losas simplemente apoyadas, el agrietamiento inicia en la cara inferior de la losa, al centro, propagándose en todo el sistema; posteriormente se presenta un aplastamiento incipiente al centro de la parte superior. El agrietamiento de la parte inferior de la losa es mayor que el aplastamiento que aparece en la cara superior, debido a la redistribución de esfuerzos y a la poca resistencia a la tensión que tiene el concreto (entre 5% y 20% de la resistencia a compresión).

Juárez Luna (2014) realizó un análisis numérico para estudiar el inicio y las trayectorias de agrietamiento para losas cuadradas y rectangulares de concreto reforzado sujetas a cargas verticales. Utilizó elementos finitos sólidos para discretizar el concreto y elementos barras para analizar el acero de refuerzo. Se observó que en las losas de concreto reforzado empotradas, el agrietamiento inicia en los bordes de la cara superior, posteriormente en el centro de la parte inferior, mientras que en las losas simplemente apoyadas, el agrietamiento inicia en el centro del claro en la cara inferior, propagándose hacia los bordes. En este estudio se descartó el método de las líneas de fluencia para determinar las trayectorias de agrietamiento y la carga de colapso, pues éste no proporciona si las trayectorias de agrietamiento ocurren en la parte superior o inferior de la losa.

La carga de inicio de agrietamiento propuesta por Juárez-Luna (2014) no incluye el acero de refuerzo para la distribución de esfuerzos en el espesor de la losa, pues al considerar el acero de refuerzo de la losa, el eje neutro cambia debido a que son dos materiales con

propiedades mecánicas diferentes, además, la fórmula de la flexión se desarrolló sólo para elementos que tienen un material homogéneo, ésta no puede aplicarse directamente para la determinación del esfuerzo normal en una losa compuesta, para aplicar la fórmula de la flexión para el análisis de los esfuerzos es necesario aplicar el método de la sección transformada que consiste en convertir la sección de la losa en un solo material a través de una relación entre los módulos de elasticidad de cada material usando el factor de transformación “ n ” cuya expresión es $n = E_{ac}/E_{conc}$. Usando como multiplicador, este factor convierte la anchura de la sección transversal de la losa compuesta en el de una losa fabricada de un solo material que tiene la misma resistencia que la losa compuesta. Una vez determinado el esfuerzo en la sección transformada, éste debe multiplicarse por el factor de transformación para así obtener una mejor distribución de esfuerzos. En la Figura 1.1 se muestra la distribución de esfuerzos al considerar el acero de refuerzo en un ancho unitario b de la losa y considerando que el concreto aporta una resistencia a la tensión.

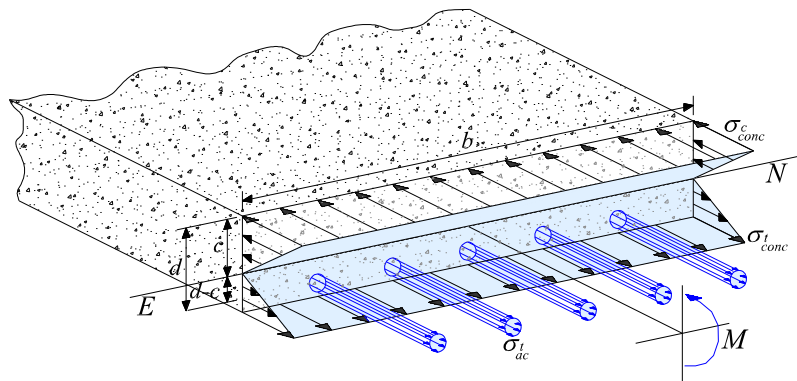


Figura 1.1 Distribución de esfuerzos considerando el acero de refuerzo

Gómez Bernal *et al.* (2015) realizaron un prototipo losa-muro de transferencia sometido a la acción de cargas verticales y horizontales cíclicas. Esta investigación tuvo como objetivo analizar de manera numérica y experimental la interacción entre el muro y la losa sobre la cual se apoyaba. La parte numérica consistió en estudiar con análisis de elementos finitos con ANSYS varios modelos losa-muro representativos de un sistema de transferencia. Por su parte la fase experimental consistió en el diseño, construcción y ensaye de un espécimen losa-muro a escala natural sujeto a carga cíclica en el laboratorio de Estructuras de la UAM, para estudiar el comportamiento ante cargas vertical y lateral del prototipo. Los resultados más importantes que se presentan, son el cambio de la rigidez lateral y de la capacidad resistente de un muro de carga apoyado en una losa respecto al caso de que éste se encuentre fijo en su base. Durante el proceso de prueba con carga horizontal se observó que la rigidez del sistema completo losa-muro disminuye a la tercera parte respecto a la del muro aislado. De los resultados obtenidos para el caso de carga vertical, derivado del análisis con ANSYS, es que para los modelos losa-muro con el mismo ancho, la rigidez en la etapa de carga de servicio es la misma, independientemente de que se varíe el espesor de

la losa, o si son muros de concreto o de mampostería, por lo que un mayor espesor de losa no proporciona una mayor rigidez.

Los trabajos anteriormente descritos han motivado el desarrollo del presente trabajo, en el cual se realizan modelos numéricos con elementos finitos en el software ANSYS. Se estudian losas macizas de concreto reforzado, encasetonadas y una losa maciza con un muro apoyado sobre ella, en las cuales se determinan las trayectorias de agrietamiento, deformaciones en el acero de refuerzo, carga de inicio de agrietamiento (w_a) y la carga última (w_u). Además, se desarrolla una expresión para determinar la carga en la que ocurre el agrietamiento utilizando el criterio del esfuerzo principal máximo, incluyendo el acero de refuerzo para la distribución de esfuerzos en el espesor de la losa. De este modo, se establecen bases para trabajos futuros donde se puedan incluir losas irregulares, y no solo realizar análisis a nivel elemento sino que también a nivel estructura.

1.3 Objetivo

1.3.1 General

El objetivo de esta tesis es desarrollar una metodología para determinar la carga en la que ocurre el agrietamiento en losas, así como determinar las trayectorias de agrietamiento cuando se someten a carga vertical. Para determinar la carga en la que ocurre el agrietamiento se utilizará el criterio del esfuerzo principal máximo, mejorando la propuesta de Juárez-Luna (2014), pues no incluye el acero de refuerzo para la distribución de esfuerzos en el espesor de la losa. Se realizarán modelos numéricos con técnicas avanzadas de elementos finitos de losas en el software ANSYS. Se estudiarán losas macizas de concreto reforzado, encasetonadas y una losa maciza con un muro apoyado sobre ella.

1.3.2 Particulares

- Desarrollar una expresión analítica para determinar la carga en la que inicia el agrietamiento en losas macizas de concreto reforzado considerando que el eje neutro es distinto al geométrico debido a la presencia de dos materiales;
- Validar la expresión para determinar la carga en la que inicia el agrietamiento de losas macizas; y
- Estudiar la carga en la que inicia el agrietamiento y sus trayectorias de propagación en losas macizas de concreto reforzado que tienen muros apoyados sobre ella.

1.4 Organización de la tesis

La organización de esta tesis se presenta en cinco capítulos y dos anexos:

- En el *Capítulo 1* se describe brevemente la historia del uso de las losas, así como de las investigaciones realizadas sobre el estudio de las cargas de inicio de agrietamiento y de las trayectorias de propagación en losas. Además se describen los objetivos y la motivación que dan lugar al presente trabajo, así como el contenido de la tesis.
- En el *Capítulo 2* se presenta una breve descripción de algunos de los métodos utilizados para determinar la carga de inicio de agrietamiento y la carga última en losas.
- En el *Capítulo 3* se describen y se presentan los resultados obtenidos de los modelos numéricos realizados en el software ANSYS de sistemas de losas macizas, encasetonadas y de la losa maciza con muro apoyado sobre ella, los tres tipos de losas son de concreto reforzado. De estos resultados se determinan las trayectorias de agrietamiento, las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro, deformaciones en el acero de refuerzo, la magnitud de la carga de inicio de agrietamiento w_a y de la carga última w_u , la cual se compara con la obtenida con el método de las líneas de fluencia. Estos resultados se obtienen al someter a dichas losas a carga vertical.
- En el *Capítulo 4* se desarrolla una formulación matemática para determinar la magnitud de la carga de inicio de agrietamiento de los sistemas de losas descritos en el capítulo 3. En estos análisis se utiliza el criterio del esfuerzo principal máximo propuesto por Juárez-Luna (2014) descrito en la sección 2.2 e incluyendo el acero de refuerzo para la distribución de esfuerzos en el espesor de la losa.
- En el *Capítulo 5* se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas de esta tesis, así como un planteamiento para trabajos futuros.
- En el anexo A se determina la carga última para las losas macizas de concreto reforzado a través del método de las líneas de fluencia.
- En el anexo B se determina la carga última de losa maciza de concreto reforzado que tiene un muro apoyado sobre ella a través del método de las líneas de fluencia.

CAPÍTULO 2

Métodos para determinar las cargas de inicio de agrietamiento y última en losas

En este capítulo se describen algunos de los métodos utilizados para determinar la carga de inicio de agrietamiento y carga última en losas.

2.1 Líneas de fluencia

El análisis de losas mediante el método de las líneas de fluencia fue propuesto inicialmente por Ingerslev (1923) y ampliado considerablemente por Johansen (1962). El método de las líneas de fluencia es un método de límite superior y, en consecuencia, la carga última calculada puede sobrestimarse, por lo tanto debe cuidarse el elegir las posibles configuraciones de las líneas de fluencia, para asegurarse usar en el diseño la que proporcione la carga de menor magnitud o el momento flexionante de mayor magnitud.

En losas, el mecanismo de colapso corresponde a la trayectoria de las líneas de fluencia. El momento resistente por unidad de longitud medido a lo largo de una línea de fluencia es constante a medida que ocurre la rotación inelástica; la línea de fluencia sirve de eje de rotación para el segmento de losa. Al incrementar la carga, cuando el momento aplicado es igual a la capacidad última a flexión de la sección transversal de la losa, el acero a tensión empieza a fluir a lo largo de la línea transversal de máximo momento.

En la teoría de las líneas de fluencia se supone que la losa tiene un modo de falla por flexión, esto es, que la losa tiene suficiente resistencia a corte como para prevenir una falla por cortante.

Las reglas para determinar los ejes de rotación y las líneas de fluencia son:

- 1) Las líneas de fluencia son rectas;
- 2) Los ejes de rotación generalmente representan líneas de fluencia;
- 3) Los ejes de rotación pasan por los puntos de apoyo;
- 4) Debajo de las cargas concentradas se forman líneas de fluencia que salen radialmente desde el punto de aplicación de la carga; y
- 5) La línea de fluencia común a dos porciones de losa pasa por el punto de intersección de los ejes de rotación de dichas porciones.

De esta manera, se pueden proponer de forma sencilla los mecanismos de colapso de losas, como los que se muestran en la Figura 2.1.

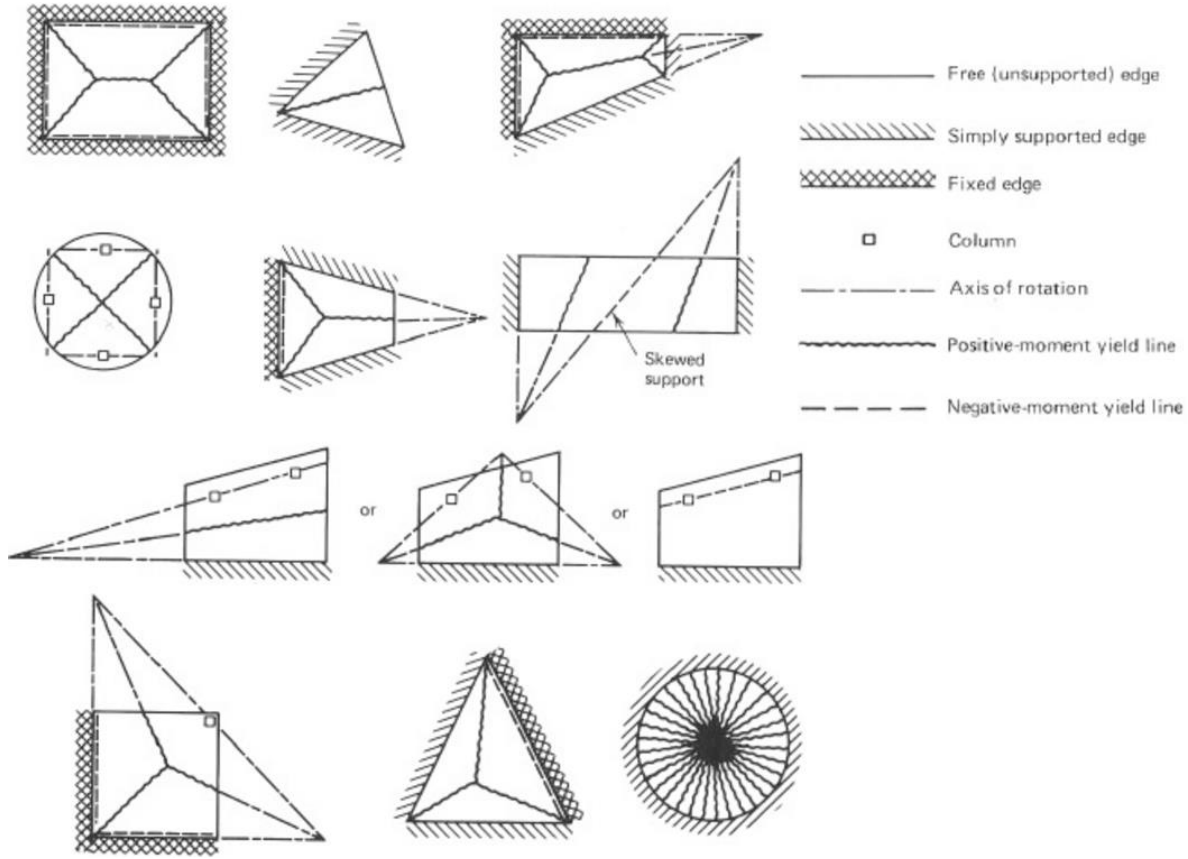


Figura 2.1 Configuraciones de líneas de fluencia para losas (adaptada de Nilson A. 1999)

El cálculo del momento resistente último de la losa se obtiene con la ecuación siguiente:

$$M_u = \phi A_s f_y \left(d - \frac{0.59 A_s f_y}{f'_c b} \right) \quad (2.1)$$

donde, ϕ es el factor de reducción por flexión, en este caso $\phi=0.9$, A_s es el área del acero de refuerzo positivo por metro lineal de losa, f_y es el esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo, f'_c es el esfuerzo a compresión del concreto, d es el peralte efectivo de la losa y b es el ancho unitario de losa.

Existen dos métodos de análisis para el cálculo de las líneas de fluencia, el método de equilibrio de secciones y el método del trabajo virtual, como se detallan a continuación.

2.1.1 Método de equilibrio de secciones

Una vez que se establece el patrón aproximado de las líneas de fluencia se determina la carga última para una losa, considerando el equilibrio de las porciones de la losa. Cada uno

de estos segmentos se considera como cuerpo libre y debe estar en equilibrio bajo la acción de las cargas aplicadas, momentos flectores a lo largo de las líneas de fluencia y reacciones o fuerzas cortantes a lo largo de las líneas de apoyo. Debe resaltarse que los momentos de torsión y muchas veces las fuerzas cortantes son nulas a lo largo de las líneas de fluencia, puesto que los momentos de fluencia son principales.

Generalmente se utiliza el equilibrio de momentos con respecto al eje de rotación de la losa. En la Figura 2.2 se ejemplifica el equilibrio de momentos de una de las porciones de una losa cuadrada analizada en dos direcciones con carga uniformemente distribuida.

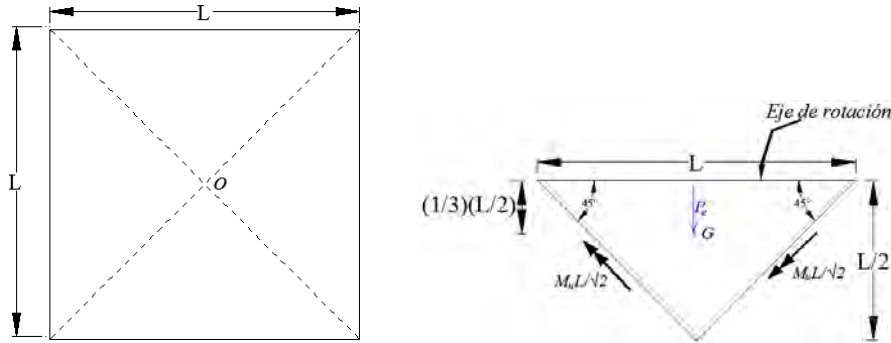


Figura 2.2 Equilibrio de momentos de una porción de una losa cuadrada en dos direcciones con carga uniformemente distribuida

Este equilibrio se realiza con la suma de momentos alrededor del eje de rotación, de tal manera que:

$$\sum M_{eje} = \left(\frac{L \left(\frac{L}{2} \right)}{2} w_u \right) \frac{1}{3} \frac{L}{2} - 2 \left(\frac{M_u L}{\sqrt{2}} \cos 45^\circ \right) = 0 \quad (2.2)$$

De la cual se despeja la carga última de la losa, obteniéndose:

$$w_u = 24 \frac{M_u}{L^2} \quad (2.3)$$

2.1.2 Método del trabajo virtual

En este método se iguala el trabajo interno con el externo para encontrar la relación entre las cargas aplicadas y los momentos últimos resistentes de la losa, ecuación (2.4). Se toma este supuesto, pues el trabajo externo realizado por las cargas para producir una deflexión virtual arbitrariamente pequeña debe ser igual al trabajo interno hecho a medida que la losa rota alrededor de las líneas de fluencia para permitir esta deflexión. La igualdad entre el trabajo interno y el externo es:

$$W_i = W_e \quad (2.4)$$

2.1.2.1 Trabajo externo

Para calcular el trabajo externo, como primer paso se impone un desplazamiento arbitrario a un punto cualquiera de la configuración de líneas de fluencia propuesta, puede elegirse cualquier punto y cualquier valor del desplazamiento porque las energías externa e interna varían proporcionalmente al desplazamiento y al igualarse se elimina dicho valor. Por simplicidad, el punto elegido es la intersección de dos líneas de fluencia y se propone un valor unitario al desplazamiento.

El trabajo externo se calcula como la sumatoria del producto de la carga total por el desplazamiento del punto de aplicación de su resultante de cada porción de losa, *i.e.*,

$$W_e = \sum_{i=1}^n P_{e_i} \delta_i \quad (2.5)$$

donde P_e es la carga resultante de cada porción de losa, δ_i es el desplazamiento vertical de la resultante, i es la porción de losa y n es el número total de porciones de losa de la configuración de líneas de fluencia propuesta. En la Figura 2.3 se muestra la configuración deformada de la losa cuadrada en dos direcciones con carga uniformemente distribuida, de la cual se calcula el trabajo externo.

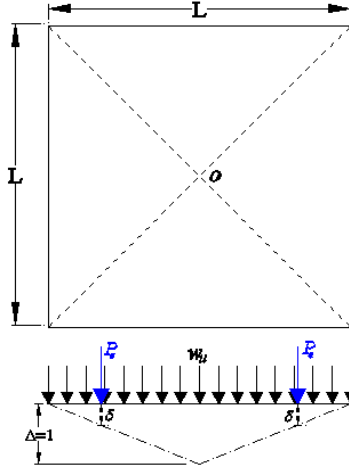


Figura 2.3 Configuración deformada de una losa cuadrada en dos direcciones con carga uniformemente distribuida, de la cual se calcula el trabajo externo

El trabajo externo se calcula con la ecuación siguiente:

$$W_e = 4 \left(\frac{L \left(\frac{L}{2} \right)}{2} w_u \frac{1}{3} \right) \quad (2.6)$$

Simplificando la ecuación (2.6), se tiene el valor del trabajo externo como:

$$W_e = \frac{L^2}{3} w_u \quad (2.7)$$

2.1.2.2 Trabajo interno

Como se supone que las zonas comprendidas entre líneas de fluencia permanecen rígidas, toda la energía interna se desarrolla únicamente a lo largo de las líneas de fluencia. Al imponer un desplazamiento al mecanismo en que se ha convertido la losa, las líneas de fluencia presentan rotaciones o giros.

El trabajo interno realizado durante la aplicación de un desplazamiento virtual se encuentra sumando los productos de los momentos de fluencia por unidad de longitud de rotula, por las rotaciones plásticas θ_i en las respectivas líneas de fluencia, consistentes con el desplazamiento virtual, *i.e.*,

$$W_i = \sum_{i=1}^n M_{u_i} L_i \theta_i \quad (2.8)$$

En la Figura 2.4 se muestra la configuración deformada en una losa cuadrada en dos direcciones con carga uniformemente distribuida, de la cual se calcula el trabajo interno realizado.

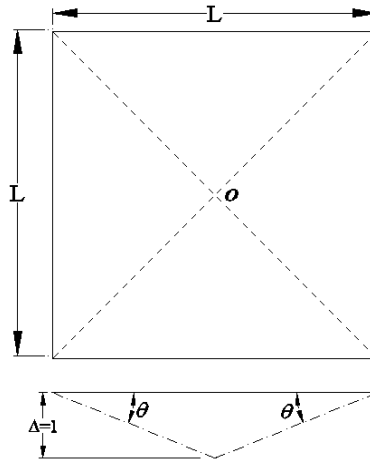


Figura 2.4 Configuración deformada de una losa cuadrada en dos direcciones con carga uniformemente distribuida, de la cual se calcula el trabajo interno

El trabajo interno se obtiene como:

$$W_i = 4 \left(M_u L \frac{2}{L} \right) \quad (2.9)$$

Simplificando la ecuación (2.9), se obtiene el valor del trabajo interno, tal que:

$$W_i = 8M_u \quad (2.10)$$

El valor de la carga última se obtiene sustituyendo los valores de las ecuaciones (2.7) y (2.10) en la ecuación (2.4) y despejando este valor, tal que:

$$w_u = 24 \frac{M_u}{L^2} \quad (2.11)$$

2.2 Esfuerzos principales

El análisis de la determinación de la carga en la que inicia el agrietamiento en losas mediante el criterio del esfuerzo principal máximo fue propuesto por Juárez-Luna (2014). Este procedimiento supone que la losa es de un material isotrópico, que las secciones transversales se mantienen planas y que el centroide coincide con el centro geométrico de la sección transversal, es decir, no incluye el acero de refuerzo para la distribución de esfuerzos en el espesor de la losa.

El procedimiento para determinar la carga de inicio de agrietamiento es:

1. Construcción de un modelo simplificado de la losa con elementos finitos placa sujeta a la acción de una carga uniformemente distribuida w .
2. Ubicación en el modelo de la magnitud del momento, m_m , correspondiente al máximo del valor absoluto de los momentos principales m_1 y m_2 .

$$m_m = \max[|m_1|, |m_2|] \quad (2.12)$$

Su localización corresponde a la zona de concentración del esfuerzo con mayor magnitud donde inicia el agrietamiento. Los momentos y direcciones principales se obtiene a partir de la mecánica de materiales, con las ecuaciones (2.13) y (2.14), respectivamente.

$$m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_x - m_y}{2}\right)^2 + m_{xy}^2} \quad (2.13)$$

$$\theta_m = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2m_{xy}}{m_x - m_y} \right) \quad (2.14)$$

Los momentos m_x , m_y y m_{xy} se muestran en la Figura 2.5.

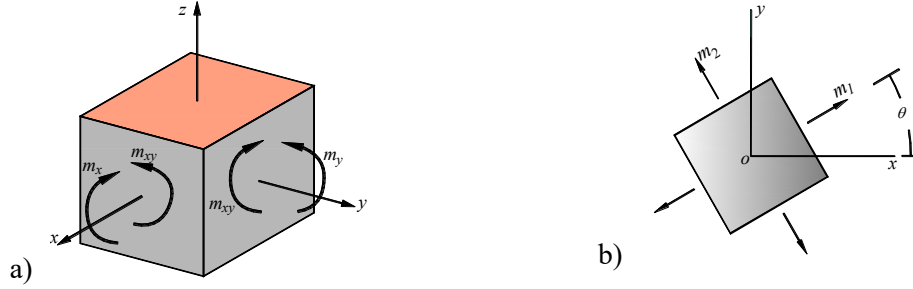


Figura 2.5 Momentos: a) cartesianos y b) principales (adaptada de Juárez-Luna 2014)

3. Determinación del esfuerzo máximo en la cara de la losa. Considerando una distribución lineal y un valor máximo en $z=t/2$.

$$\sigma_m = -\frac{6m_m}{t^2} \quad (2.15)$$

La magnitud de σ_m corresponde al máximo del valor absoluto de los esfuerzos principales, $\max[|\sigma_1|, |\sigma_2|]$, tal que si $|m_1| \geq |m_2|$ su valor en tensión se localiza en la cara inferior de la losa o si $|m_1| < |m_2|$ entonces se localiza en la cara superior.

4. Cálculo de la carga de inicio de agrietamiento, w_a . Se considera que el agrietamiento inicia cuando el esfuerzo principal máximo alcanza el valor umbral del esfuerzo último a tensión con base en la teoría del esfuerzo principal máximo de Rankine, por lo que la carga de inicio de agrietamiento se determina con la ecuación:

$$w_a = \frac{w\sigma_{tu}}{\sigma_m} \quad (2.16)$$

Sustituyendo el valor de σ_m de la ec. (2.15) en la ec. (2.16), se tiene el valor de la carga de inicio de agrietamiento en función del momento.

$$w_a = \frac{w\sigma_{tu}}{6m_m} t^2 \quad (2.17)$$

El agrietamiento ocurre en dirección perpendicular a m_m , de tal forma que si $|m_1| \geq |m_2|$ éste inicia en la cara inferior de la losa, de otra forma, si $|m_1| < |m_2|$ entonces inicia en la cara superior.

El análisis de la carga de inicio de agrietamiento propuesta con este método proporciona resultados menores en comparación con los resultados obtenidos con un análisis detallado, como por ejemplo, elementos finitos. Esto se debe a que la losa se considera como un material isotrópico y además no se incluye el acero de refuerzo para la distribución de esfuerzos en el espesor de la losa. Es importante considerar el acero de refuerzo de la losa,

puesto que el eje neutro de la sección transversal no coincide con el eje geométrico, debido a que son dos materiales con propiedades mecánicas diferentes; además, cabe mencionar que la fórmula de la flexión se desarrolló sólo para elementos que tienen un material homogéneo, y esta ecuación no puede aplicarse directamente para la determinación del esfuerzo normal en una losa de concreto reforzado. Para utilizar la fórmula de la flexión para el análisis de los esfuerzos es necesario aplicar el método de la sección transformada, que consiste en convertir el ancho de la sección transversal de la losa compuesta en el de una losa fabricada de un solo material que tiene la misma resistencia que la losa compuesta.

2.3 Mecánica computacional

Actualmente se tienen diversas herramientas computacionales para el análisis no lineal de losas de concreto reforzado y, en general, para representar el comportamiento no lineal a nivel elemento como a nivel de estructura de cualquier material. Algunos de estos programas son: ANSYS, DIANA, ATENEA, ABAQUS, ETABS, SAP, etc. Estos software utilizan principalmente el método de los elementos finitos, con el modelo de agrietamiento distribuido para el comportamiento constitutivo del concreto, el cual está equipado con una superficie de falla con diferente umbral en tensión y compresión para determinar el inicio y propagación del agrietamiento. Sin embargo, el modelo de agrietamiento distribuido tiene problemas numéricos de atoramiento de esfuerzo y modos cinemáticos falsos, los cuales son superados con factores heurísticos de retención de esfuerzo.

Aunque todos estos programas son excelentes herramientas para análisis no lineales, se utilizó para esta tesis el software ANSYS, pues el objetivo es estudiar la carga de inicio de agrietamiento, así como las trayectorias de propagación en losas.

Cuando se hacen análisis con elementos finitos a través de un software computacional especializado, se deben tener en cuenta las limitaciones y funcionamiento interno del programa, para asignar los elementos idóneos que modelen correctamente el comportamiento del material que se quiera estudiar e interpretar correctamente los resultados calculados con el programa.

2.3.1 Construcción de los modelos

Se pretende determinar las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de las losas, trayectorias de propagación y deformaciones en el acero de refuerzo considerando el comportamiento no lineal, bajo cargas verticales incrementadas monotónicamente, hasta que la losa falle o presente un daño considerable.

En todos los modelos se aprovecha la simetría de las losas, dividiendo en partes iguales a los modelos de losa, con el fin de disminuir el tiempo computacional y mejorar la convergencia. En los bordes correspondientes a los ejes de simetría se restringen los grados

de libertad perpendiculares a estos ejes, tal que estos modelos proporcionen los mismos resultados del modelo completo.

Las barras se colocan a lo largo de los bordes de los elementos sólidos hexaédricos, cuyos nodos en ambos elementos coinciden para que exista compatibilidad. El concreto se discretiza con elementos sólidos hexaédricos del tipo solid 65 y el acero se discretiza con elementos unidimensionales del tipo link 8, al que se le asigna el modelo de plasticidad de Von Mises. Ambos elementos finitos tienen tres grados de libertad traslacional por nodo.

El procedimiento para realizar el análisis de los diferentes modelos en el software ANSYS es:

1. El primer paso consiste en realizar el dibujo del modelo en 3D en el software de AUTOCAD. En este paso se debe tener especial cuidado, pues puede ser la más compleja y tediosa, dado que se recomienda dibujar parte del mallado del modelo, donde se incluyan todos los puntos donde se podrían presentar discontinuidades, intersecciones de líneas, cargas concentradas, etcétera, así como evitar el trazo de líneas traslapadas. Se debe verificar minuciosamente que el dibujo de las líneas del armado de la losa coincidan correctamente con el dibujo del mallado realizado anteriormente. Es importante mencionar que el mallado de los modelos depende de la posición y espaciamiento del acero de refuerzo, teniendo esto en cuenta, se dibuja la malla para el concreto.
2. Posteriormente se guarda el archivo con una extensión *.dxf* para importarlo con el software GID. En este programa se crea el mallado del acero de refuerzo y el mallado del concreto por separado, para posteriormente colapsarlos, con el que se hace coincidir todos los nodos del acero de refuerzo con los del concreto. Una vez hecho esto se exporta el mallado a un archivo con extensión *.msh*. Este archivo contiene las coordenadas globales en tres dimensiones de cada uno de los nodos y las conectividades para cada elemento.
3. Se extraen los datos del archivo *.msh* a un archivo de entrada *.txt*. En este archivo de entrada se debe respetar el lenguaje de ANSYS, se definen los tipos de elementos a utilizar, por ejemplo el elemento Link8 para el acero de refuerzo y el elemento solid65 para el concreto, además de asignar las propiedades lineales y no lineales de los materiales a utilizar.
4. Posteriormente, en ANSYS se importa el archivo de entrada *.txt*, en los bordes correspondientes a los ejes de simetría se restringen los grados de libertad perpendiculares a estos ejes y se aplican las cargas al modelo. Una vez hecho todo esto, se ejecuta el modelo en ANSYS, que para los análisis no lineales se requiere mayor costo computacional.

5. Finalmente se extraen los resultados y se interpretan, según lo que se desee obtener, por ejemplo: curvas de la carga contra el desplazamiento, trayectorias de propagación, deformaciones en el acero, etc. Es importante mencionar que en este tipo de modelos requiere una gran cantidad de tiempo y de recursos computacionales, por lo que se debe tener muy claro que es lo que se quiere obtener, así como tener un buen criterio para la correcta interpretación de los resultados.

2.3.2 Tipos de elementos utilizados

El software ANSYS tiene una variedad de tipos de elementos con propiedades de análisis diferentes. Los elementos utilizados para los modelos de losas analizados son: el solid65 y el Link8; para modelar el concreto y el acero de refuerzo, respectivamente.

2.3.2.1 Elemento Solid65

Es un elemento con el que se discretiza tridimensionalmente el concreto con o sin refuerzo, y tiene la capacidad de modelar el agrietamiento en tensión y aplastamiento en compresión. Es un elemento finito hexaédrico, definido por ocho nodos, como se muestra en la Figura 2.6, teniendo en cada nodo tres grados de libertad traslacional en las direcciones x, y y z, respectivamente. Además, este elemento tiene la capacidad de representar deformaciones grandes. El software ANSYS considera las siguientes suposiciones y restricciones para este elemento:

- El material de concreto se supone inicialmente isotrópico;
- Se permite el agrietamiento en tres direcciones ortogonales en cada punto de integración;
- El elemento volumen debe ser mayor que cero;
- Los elementos deben tener ocho nodos en total;
- No se recomienda considerar grandes deformaciones, ya que el análisis podría no converger o ser incorrecto; y
- El elemento es no lineal y requiere de una solución iterativa.

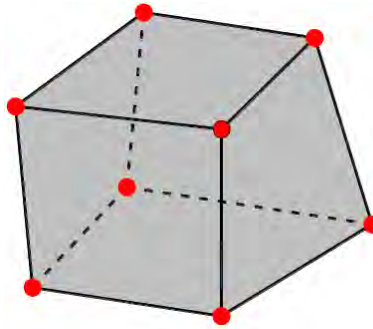


Figura 2.6 Elemento Solid65 (adaptada de ANSYS 2013)

2.3.2.2 Elemento Link8

Es un elemento barra como se muestra en la Figura 2.7; es tridimensional y capaz de desarrollar tensiones y compresiones uniaxiales, pero la flexión no está considerada en este elemento. Posee tres grados de libertad traslacional en cada nodo. Este elemento considera plasticidad, fluencia, endurecimiento por tensión y capacidad de grandes deformaciones. Generalmente se emplea un modelo de comportamiento bilineal para el acero.

Posee un área transversal, propiedades del material como módulo de elasticidad y relación de Poisson, etcétera; además de lo anterior, es posible asignarle propiedades no lineales. El software ANSYS considera las siguientes suposiciones y restricciones para este elemento:

- El elemento es considerado como una barra recta, cargada axialmente en sus extremos;
- Los nodos extremos no deben coincidir, es decir, su longitud debe ser mayor que cero;
- Su área transversal debe ser mayor que cero; y
- La función de forma del desplazamiento implica un esfuerzo uniforme en toda la barra.

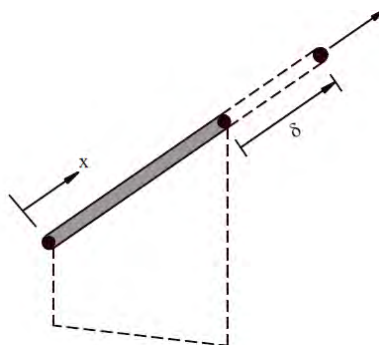


Figura 2.7 Elemento Link8 (adaptada de ANSYS 2013)

CAPÍTULO 3

Modelado de sistemas de losas

En este capítulo se presentan los modelos numéricos en el software ANSYS de sistemas de losas macizas, encasetonadas y de una losa maciza con un muro apoyado sobre ella, los tres tipos de concreto reforzado, donde se determinan las trayectorias de agrietamiento cuando se someten a carga vertical, así como las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de las losas, deformaciones en el acero de refuerzo, la magnitud de la carga de inicio de agrietamiento (w_a) y de la carga última (w_u), la cual se compara con la obtenida con el método de las líneas de fluencia.

Se utilizan elementos finitos sólidos hexaédricos de ocho nodos (Solid65) para discretizar el concreto, como el que se muestra en la Figura 2.6 y elementos tipo barras (Link8) para el acero de refuerzo, como el que se muestra en la Figura 2.7, los elementos tipo barra se colocan a lo largo de los bordes de los elementos sólidos, conectándose en sus nodos extremos. Se utiliza una superficie de daño con diferentes umbrales en tensión y en compresión para representar el comportamiento constitutivo del concreto, mientras que el endurecimiento del acero de refuerzo se idealiza con un modelo de plasticidad unidimensional de Von Mises.

3.1 Losa maciza

En esta sección se realizan los modelos numéricos para la geometría de dos losas: cuadrada y rectangular. La losa cuadrada tiene dimensiones de 400 cm por lado, mientras que la losa rectangular tiene dimensiones de 400 x 200 cm. En los análisis de estas losas se consideraron simplemente apoyadas y empotradas en todos sus bordes, cargadas uniformemente en toda su área; ambas losas tienen un espesor de 10 cm. Las cuatro losas están reforzadas con barras de acero con diámetro $\phi=3/8''$, las cuales están colocadas en el lecho inferior en ambos sentidos con una separación de 40 cm, con columpios a cada 40 cm y con bastones colocados intercalados con los columpios en el lecho superior a cada 40 cm, quedando así una parrilla de 20 cm en ambos sentidos, como se muestra en la Figura 3.1, ambos lechos del acero de refuerzo tienen un recubrimiento de 2 cm. El concreto tiene las propiedades mecánicas siguientes: resistencia a la compresión $\sigma_c=292 \text{ kgf/cm}^2$ (28.64 MPa), resistencia a la tensión $\sigma_t=29.2 \text{ kgf/cm}^2$ (2.86 MPa), módulo de elasticidad $E_c=150000 \text{ kgf/cm}^2$ (14.71 GPa) y relación de Poisson $\nu=0.2$; mientras que el acero de refuerzo tiene un esfuerzo de fluencia $\sigma_y=4200 \text{ kgf/cm}^2$ (411.9 MPa), módulo de elasticidad $E_s=2.0 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ (196.13 GPa) y relación de Poisson $\nu=0.3$.

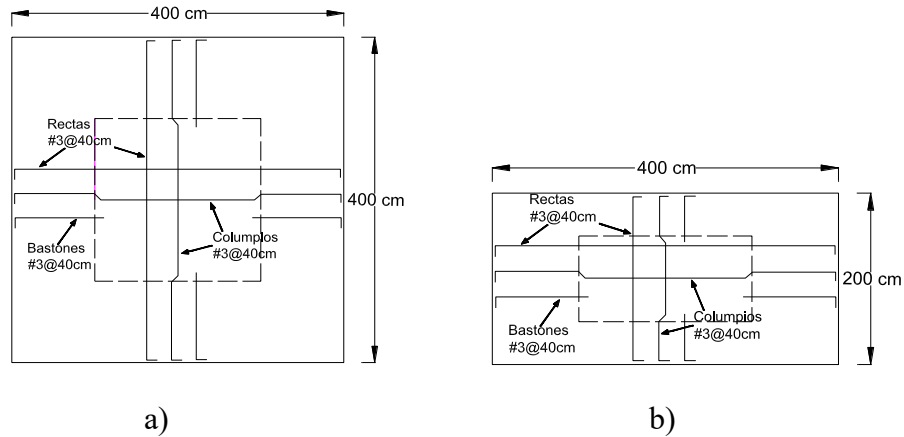


Figura 3.1 Vista en planta del armado de las losas: a) cuadrada y b) rectangular

En todos los modelos solo se analizó una cuarta parte de la losa por tener dos ejes de simetría en la geometría y en las cargas, con el fin de ahorrar tiempo computacional y mejorar la convergencia. En los bordes correspondientes a los ejes de simetría se restringieron los grados de libertad perpendiculares a estos ejes, tal que la cuarta parte de estos modelos proporcionen los mismos resultados del modelo completo, como se observa en la Figura 3.2.

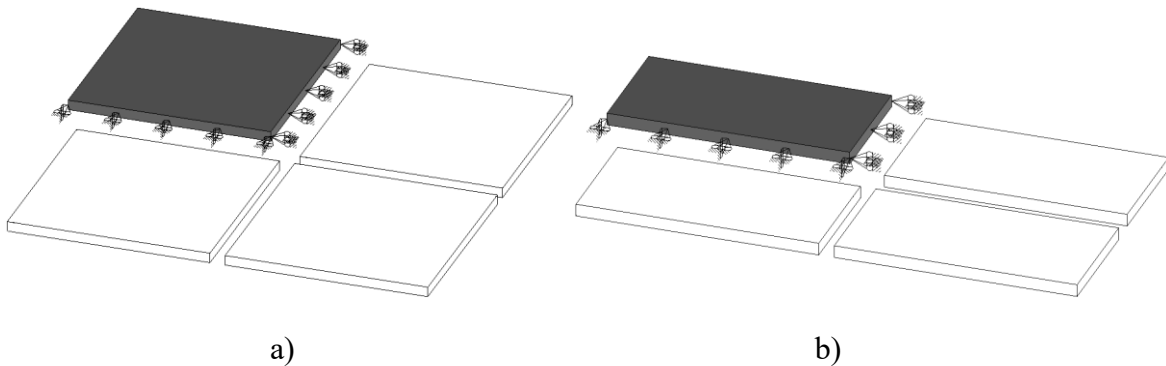


Figura 3.2 Configuración de los modelos de las losas estudiadas: a) cuadrada y b) rectangular

Los dibujos de los armados se realizaron en el software de dibujo AUTOCAD (Autodesk 2014), los cuales se discretizaron posteriormente en el software de pre y post proceso de elementos finitos GID (CIMNE 2014). En las Figuras 3.3 y 3.4 se muestran el armado y el mallado de la losa cuadrada y la losa rectangular, respectivamente. El acero de refuerzo se discretizó con elementos barra de 10 cm de longitud y el concreto se discretizó con elementos sólidos de 10 x 10 x 2 cm en sus bordes. En la losa cuadrada se tienen un total de 533 elementos barra y 2000 elementos sólidos; por otra parte, en la losa rectangular se tienen un total de 274 elementos barra y 1000 elementos sólidos. El acoplamiento de la malla del acero de refuerzo con el concreto se muestra en la Figura 3.5 de los modelos

importados a ANSYS (ANSYS 2013), donde la malla del primero está embebida en la malla del concreto.

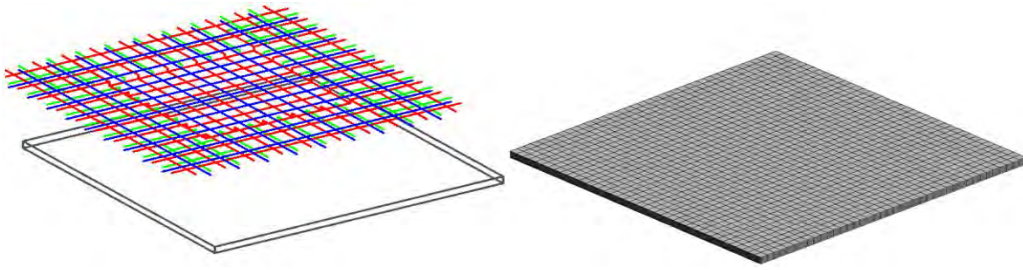


Figura 3.3 Armado y mallado de la losa cuadrada.

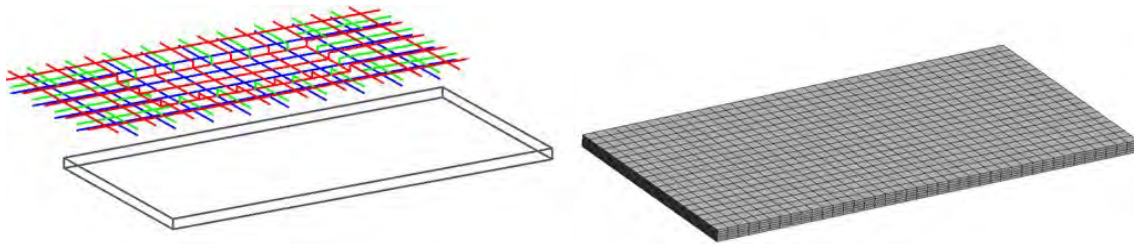


Figura 3.4 Armado y mallado de la losa rectangular

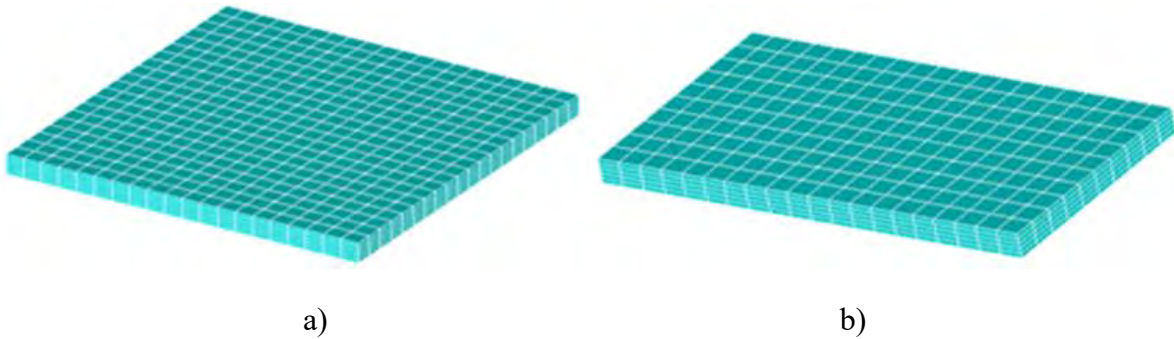


Figura 3.5 Modelos en ANSYS: a) cuadrada y b) rectangular

3.1.1 Curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa

De los resultados numéricos se obtuvieron las curvas de la carga distribuida contra el desplazamiento calculado en el centro de cada una de las losas. De estas curvas se comenta lo siguiente:

- Las losas simplemente apoyadas con ambas geometrías presentan un desplazamiento mayor al de las losas empotradas como se muestra en la Figura 3.6.

- La losa cuadrada simplemente apoyada presenta una carga de inicio del agrietamiento $w_a=714.6 \text{ kg/m}^2$, una carga última $w_u=1,427.2 \text{ kg/m}^2$ y un desplazamiento vertical máximo al centro de la losa de casi 10 cm, como se muestra en la Figura 3.6a. Esta misma losa pero empotrada en sus bordes presenta una carga de inicio del agrietamiento $w_a=758.7 \text{ kg/m}^2$, una carga última $w_u=4,481.5 \text{ kg/m}^2$ y un desplazamiento vertical máximo al centro de la losa de 2.3 cm.
- La losa rectangular simplemente apoyada presenta una carga de inicio del agrietamiento $w_a=1,395 \text{ kg/m}^2$, una carga última $w_u=3,774.6 \text{ kg/m}^2$ y un desplazamiento vertical máximo al centro de la losa de casi 8 cm, como se muestra en la Figura 3.6b. Esta misma losa pero empotrada presenta una carga de inicio del agrietamiento $w_a=1,517.7 \text{ kg/m}^2$, una carga última $w_u=12,312.4 \text{ kg/m}^2$ y un desplazamiento vertical máximo al centro de la losa de 0.81 cm.

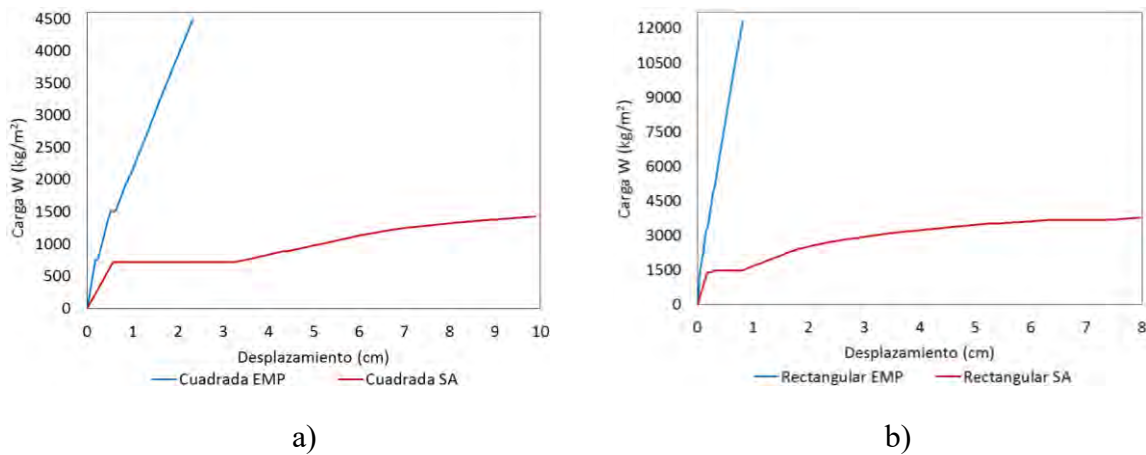


Figura 3.6 Curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de las losas: a) cuadradas y b) rectangulares.

3.1.2 Deformaciones en el acero de refuerzo

Para revisar si el acero de refuerzo alcanza la fluencia, se analizan las deformaciones del acero de refuerzo tanto del lecho superior como del lecho inferior, comparándolas con la deformación de fluencia, ε_y , la cual se calcula como $\varepsilon_y = \sigma_y / E_s$. Las franjas analizadas fueron: $a-b$, $a-d$, $b-c$ y $d-c$, como se muestra en la Figura 3.7, que es donde se esperan los momentos de mayor magnitud y en consecuencia las deformaciones mayores.

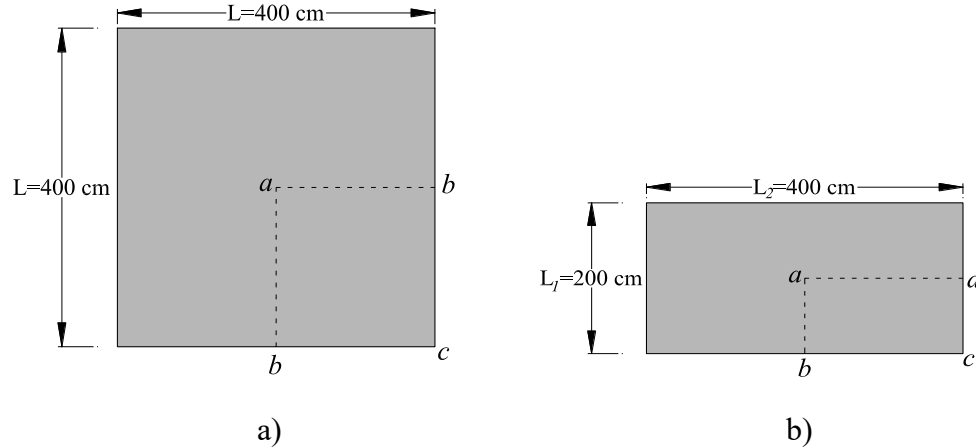


Figura 3.7 Franjas analizadas de las losas: a) cuadradas y b) rectangulares

De las gráficas de las deformaciones en el acero de refuerzo de cada una de las losas se comenta lo siguiente:

- **Losa cuadrada simplemente apoyada (LCSA).** En la franja $a-b$ de la losa (Figura 3.7a), las barras de acero del lecho inferior cercanas del centro de la losa fluyen en tensión debido a la carga distribuida, mientras que las barras de acero que se encuentran en compresión no alcanzan la deformación de fluencia, como se muestra en la Figura 3.8a. Mientras que las deformaciones que presentan las barras de acero que se encuentran en la franja $b-c$ de la losa, se observa que las barras de acero que están cercanas a las esquinas de la losa presentan deformaciones en tensión, las cuales no alcanzan la deformación de fluencia, como se muestra en la Figura 3.8b.

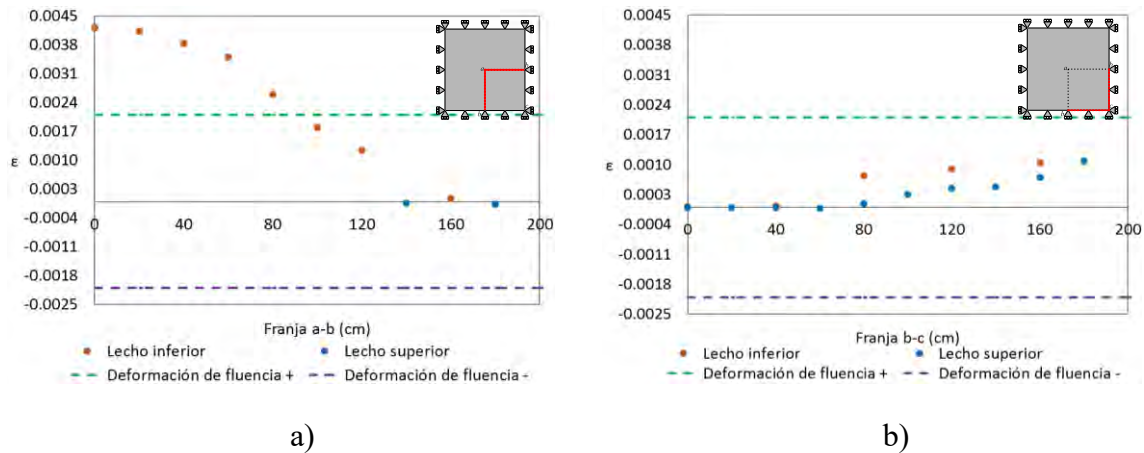


Figura 3.8 Deformaciones en el acero de la LCSA, en la franja: a) $a-b$ y b) $b-c$

- **Losa cuadrada empotrada (LCE).** En la franja $a-b$ de la losa (Figura 3.7a), las barras de acero del lecho inferior al centro de la losa presentan deformaciones en tensión menores a ϵ_y , permaneciendo en el intervalo elástico, como se muestra en la Figura

3.9a. Mientras que las deformaciones que presentan las barras de acero que se encuentran en la franja $b-c$ de la losa, se observa que la zona más crítica es la que se encuentra al centro de la losa, donde las barras de acero en el lecho superior fluyen en tensión debido a los esfuerzos en el empotramiento, mientras que en el lecho inferior las barras de acero presentan deformaciones a compresión que no alcanzan la fluencia, como se muestra en la Figura 3.9b.

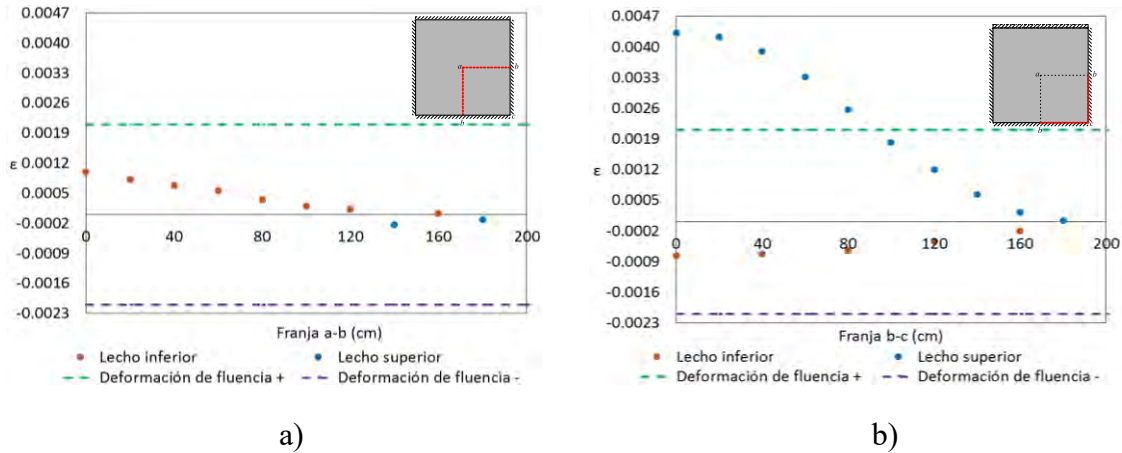


Figura 3.9 Deformaciones en el acero de la LCE, en la franja: a) $a-b$ y b) $b-c$

- Losa rectangular simplemente apoyada (LRSA).** Las deformaciones que presentan las barras de acero que se encuentran en la franja $a-b$ de la losa (Figura 3.7b), ubicadas en el lecho inferior, están sometidas a tensión debido a la carga uniformemente distribuida; particularmente las deformaciones de las barras cercanas al centro de la losa están próximas a la fluencia del material, como se muestra en la Figura 3.10a. Las deformaciones que presentan las barras de acero que se encuentran en la franja $a-d$ de la losa, ubicadas en el lecho inferior, fluyen en tensión, mientras que las barras en el lecho superior están sometidas a deformaciones a compresión pequeñas, como se muestra en la Figura 3.10b. Las deformaciones que presentan las barras de acero que se encuentran en ambos lechos de la franja $d-c$ de la losa están sometidas a tensión; sin embargo, las deformaciones unitarias son pequeñas, como se muestra en la Figura 3.10c. Las deformaciones que presentan las barras de acero que se encuentran en ambos lechos de en la franja $b-c$ de la losa están sometidas a tensión; las deformaciones de las barras del lecho inferior son cercanas a la fluencia, como se muestra en la Figura 3.10d.

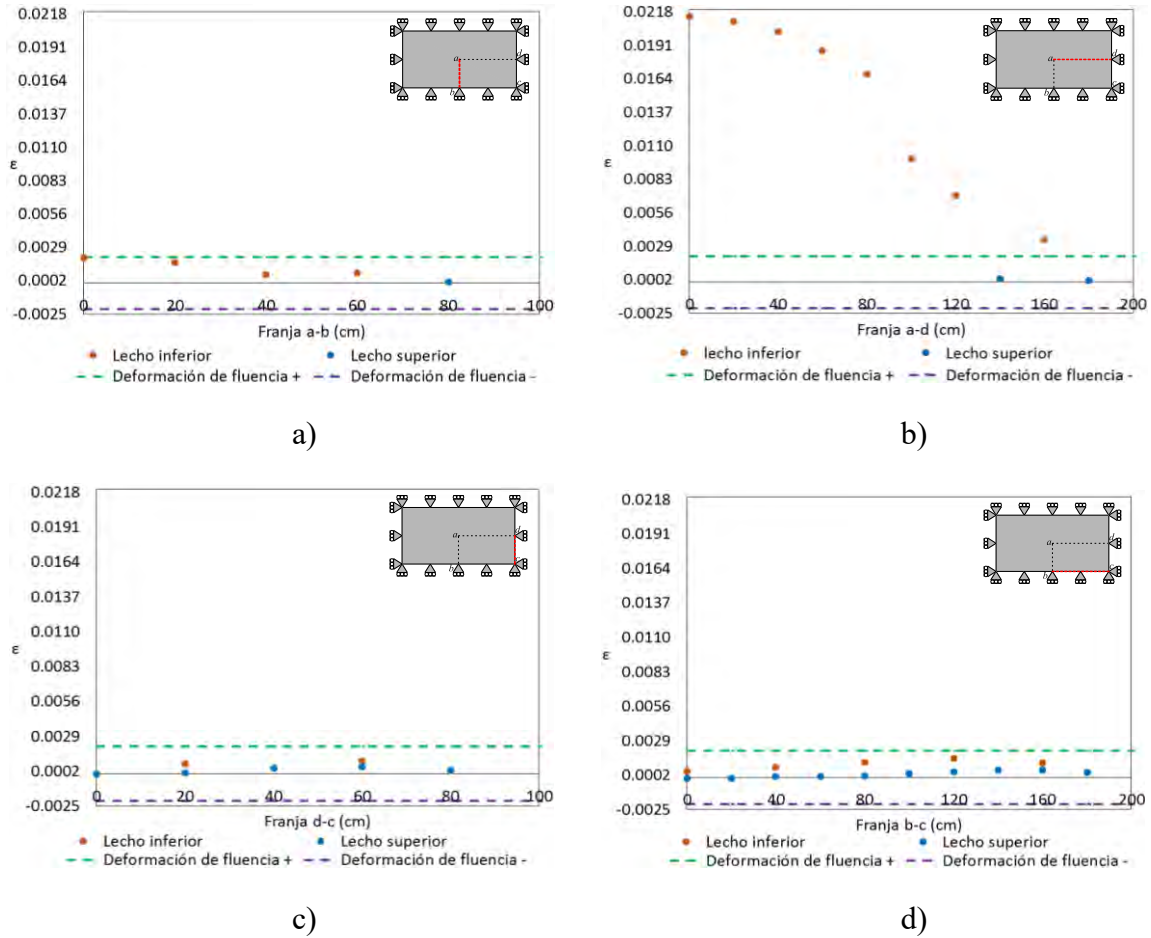


Figura 3.10 Deformaciones en el acero de la LRSA, en la franja: a) *a-b*, b) *a-d*, c) *d-c* y d) *b-c*

- Losa rectangular empotrada (LRE).** Las deformaciones que presentan las barras de acero que se encuentran en ambos lechos de la franja *a-b* de la losa (Figura 3.7b) están sometidas a deformaciones pequeñas, como se muestra en la Figura 3.11a. Las deformaciones que presentan las barras de acero que se encuentran en la franja *a-d* de la losa, ubicadas en el lecho inferior, presentan deformaciones en tensión, pero no alcanzan la fluencia del material, mientras que las barras en el lecho superior están sometidas a deformaciones a compresión pequeñas, como se muestra en la Figura 3.11b. Las deformaciones que presentan las barras de acero que se encuentran en la franja *d-c* de la losa, ubicadas en el lecho superior, están cercanas a la fluencia en tensión, mientras que las barras en el lecho inferior están sometidas a deformaciones pequeñas a compresión, como se muestra en la Figura 3.11c. Las deformaciones que presentan las barras de acero que se encuentran en la franja *b-c* de la losa, es decir, las barras ubicadas sobre el borde largo de la losa que se encuentran en la franja del empotramiento, se observa que la mayoría de las barras del lecho superior fluyen en tensión, mientras que las barras de acero del lecho inferior están sometidas a pequeñas deformaciones debidas a compresión, como se muestra en la Figura 3.11d.

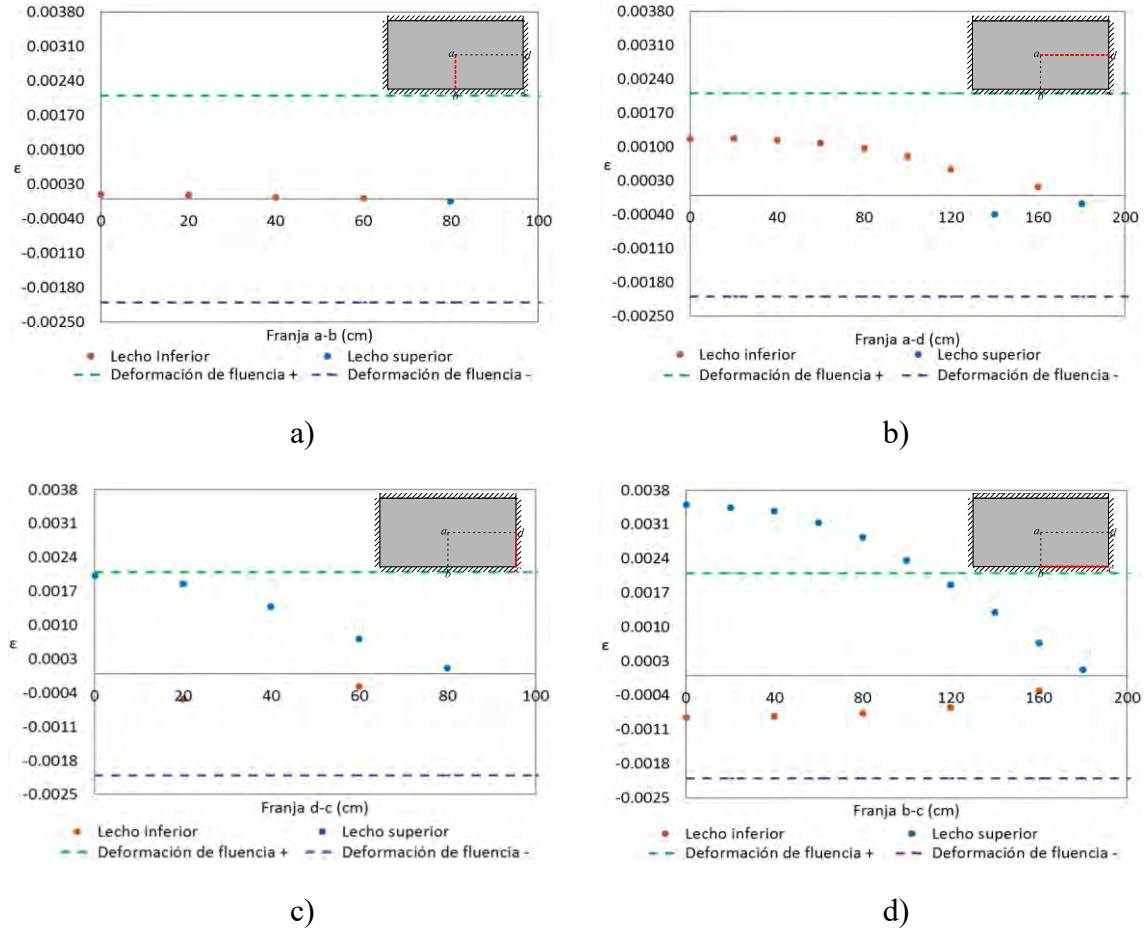
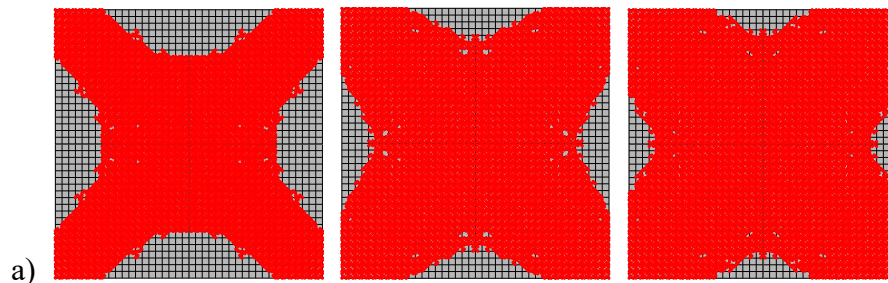


Figura 3.11 Deformaciones en el acero de la LRE, en la franja: a) *a-b*, b) *a-d*, c) *d-c* y d) *b-c*

3.1.3 Trayectorias de agrietamiento

En esta sección se analizan las trayectorias de propagación en los sistemas de losas macizas, se analiza tanto la cara superior como la cara inferior de cada losa.

- **Losa cuadrada simplemente apoyada.** El agrietamiento en la cara inferior inicia en el centro de la losa en forma de cruz, propagándose hacia las esquinas, como se muestra en la Figura 3.12a. Mientras que en la cara superior inicia en las esquinas y se propaga hacia el centro, como se muestra en la Figura 3.12b. El agrietamiento inicia simultáneamente en ambas caras.



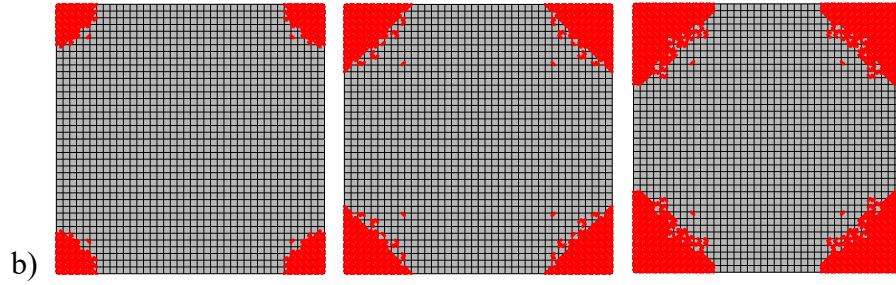


Figura 3.12 Trayectorias de agrietamiento de la LCSA, en la cara: a) inferior y b) superior

- **Losa cuadrada empotrada.** El agrietamiento en la cara inferior inicia en el centro de la losa en forma de cruz, propagándose hacia las esquinas, como se muestra en la Figura 3.13a. Mientras que el agrietamiento en la cara superior inicia primero que el agrietamiento en la cara inferior, este agrietamiento se origina en los bordes de la losa, propagándose hacia el centro hasta formar un anillo, como se muestra en la Figura 3.13b.

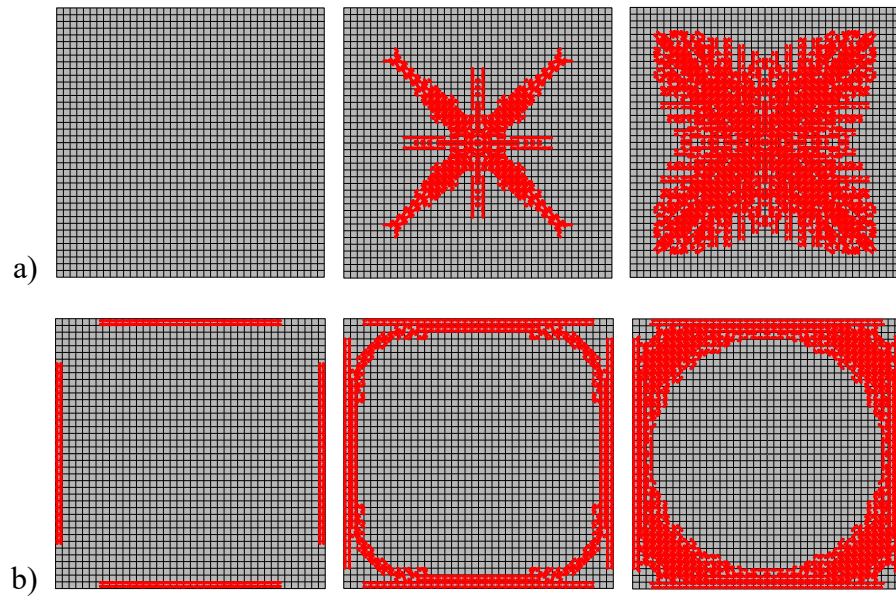


Figura 3.13 Trayectorias de agrietamiento de la LCE, en la cara: a) inferior y b) superior

- **Losa rectangular simplemente apoyada.** El agrietamiento en la cara inferior inicia primero que en la cara superior, este agrietamiento se origina sobre una banda al centro de la losa, paralela a los bordes largos y se propaga hacia las esquinas de la losa, como se muestra en la Figura 3.14a. El agrietamiento en la cara superior inicia después que en la cara inferior, inicia en las esquinas y se propaga hacia el centro de la losa, como se muestra en la Figura 3.14b.

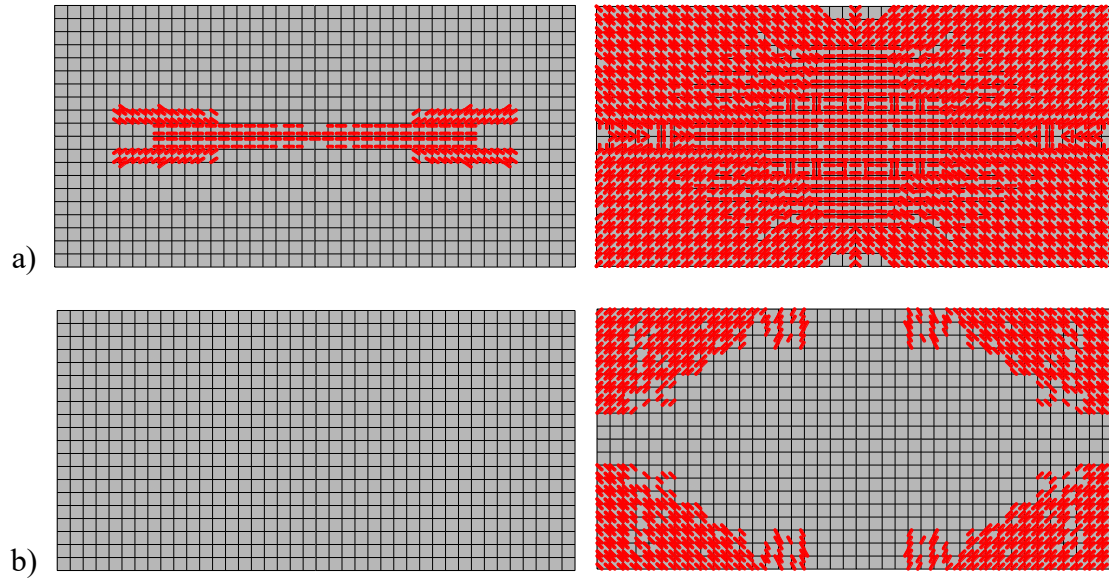


Figura 3.14 Trayectorias de agrietamiento de la LRSA, en la cara: a) inferior y b) superior

- **Losa rectangular empotrada.** El agrietamiento en la cara inferior inicia simultáneamente con el agrietamiento en la cara superior, este agrietamiento inicia sobre una banda en el centro de la losa, paralela a los bordes largos y se propaga hacia las esquinas de la losa, como se muestra en la Figura 3.15a. En la cara superior, el agrietamiento inicia a lo largo de los bordes largos, propagándose hacia los bordes cortos, posteriormente éste se propaga hacia el centro hasta formar un anillo, como se muestra en la Figura 3.15b.

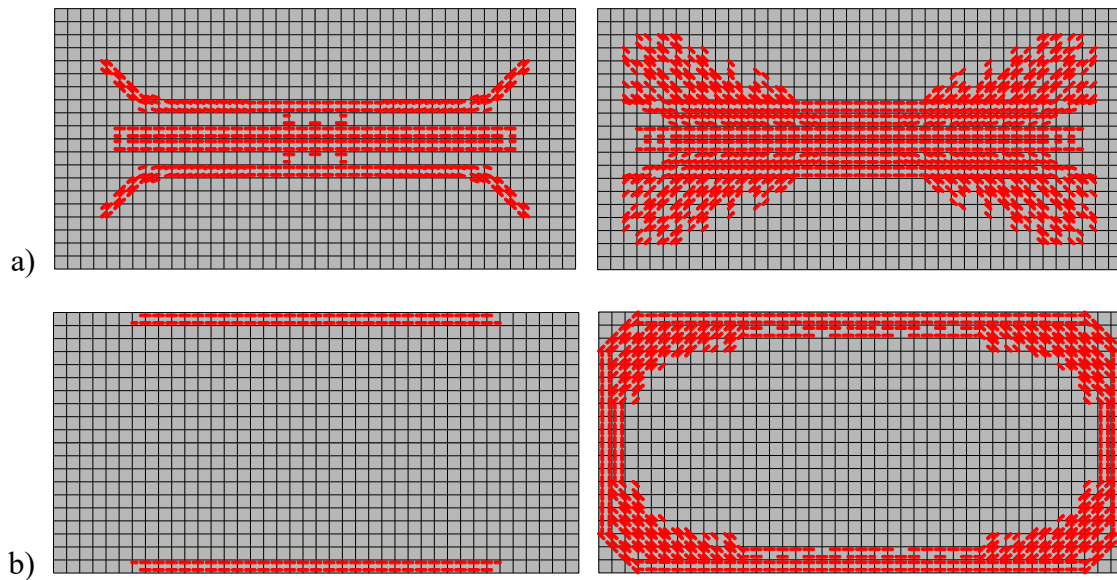


Figura 3.15 Trayectorias de agrietamiento de la LRE, en la cara: a) inferior y b) superior

3.1.4 Análisis elásticos en SAP2000

Se modelan las cuatro losas macizas en SAP2000, donde se analizaron los modelos completos, pues al ser análisis elásticos, no se requiere mucho costo computacional. Se determina la carga en la que ocurre el agrietamiento en función del esfuerzo de tensión, es decir, la carga necesaria para desarrollar un esfuerzo igual al esfuerzo de tensión en la losa.

En la Figura 3.16a se muestran los esfuerzos principales en tensión sobre la cara inferior de la losa cuadrada simplemente apoyada, donde se marcan con líneas punteadas de color rojo la tendencia de estos esfuerzos principales, los cuales forman una cruz que inicia al centro de la losa. Mientras que los esfuerzos principales en tensión con mayor magnitud sobre la cara superior ocurren en las esquinas, donde se marcan con líneas punteadas de color rojo, como se muestra en la Figura 3.16b. Estos esfuerzos principales se presentan al aplicarle una carga $w_a=688 \text{ kgf/m}^2$. Se observa que el esfuerzo máximo obtenido es aproximadamente el esfuerzo último a tensión $\sigma_t=29.2 \text{ kgf/cm}^2$, por lo que iniciaría el agrietamiento en esta zona puesto que se alcanza la magnitud del σ_t .

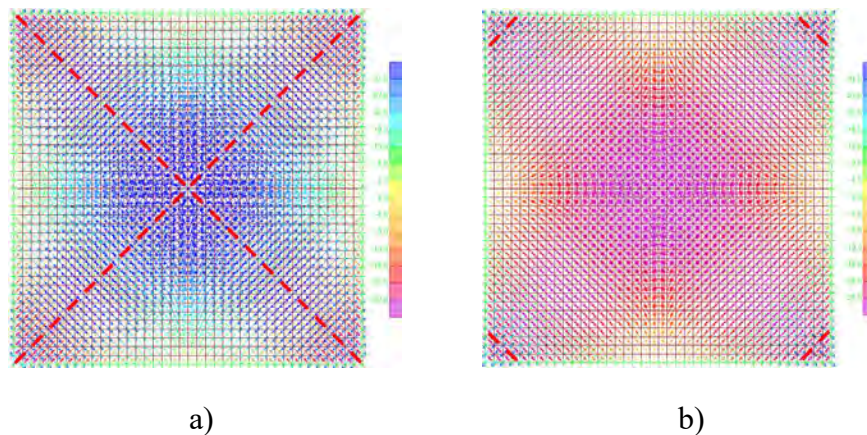


Figura 3.16 Esfuerzos principales en la LCSA, en la cara: a) inferior y b) superior

En la Figura 3.17a se muestra los esfuerzos principales a tensión en la cara inferior de la losa cuadrada empotrada, de la que se observa que no existe agrietamiento en esta zona debido a que los esfuerzos a tensión no superan el esfuerzo a tensión resistente del concreto. Mientras que los esfuerzos principales en tensión con mayor magnitud sobre la cara superior se forman en los bordes de la losa, donde se marcan con líneas punteadas de color rojo, como se muestra en la Figura 3.17b. Estos esfuerzos principales se presentan al aplicarle una carga $w_a=660 \text{ kgf/m}^2$. El esfuerzo máximo obtenido es aproximadamente el esfuerzo último a tensión del concreto $\sigma_t=29.2 \text{ kgf/cm}^2$.

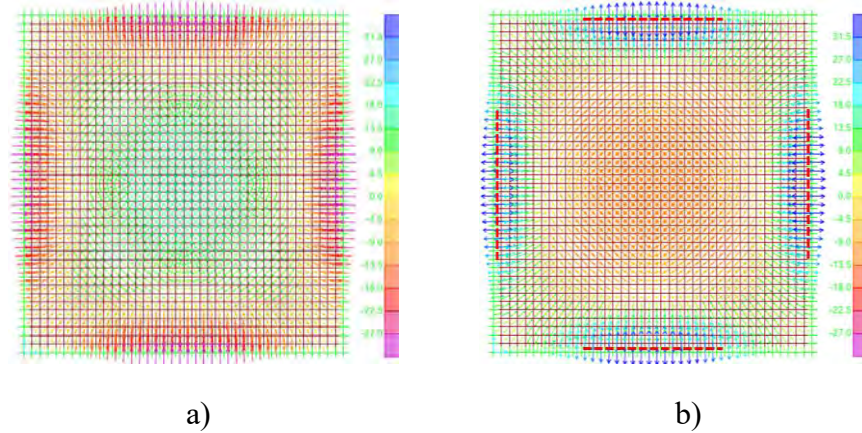


Figura 3.17 Esfuerzos principales en la LCE, en la cara: a) inferior y b) superior

En la Figura 3.18a se muestran los esfuerzos principales en tensión sobre la cara inferior de la losa rectangular simplemente apoyada, donde se marcan con líneas punteadas de color rojo aquellos esfuerzos principales con mayor magnitud, los cuales forman una banda paralela a la dirección larga al centro de la losa. Mientras que sobre la cara superior, los esfuerzos principales a tensión no superan el esfuerzo a tensión resistente del concreto y por lo tanto no se presenta agrietamiento en esta zona, como se muestra en la Figura 3.18b. Estos esfuerzos principales se presentan al aplicarle una carga $w_a=1223 \text{ kgf/m}^2$. Se observa que el esfuerzo máximo obtenido es aproximadamente el esfuerzo de tensión $\sigma_t=29.2 \text{ kgf/cm}^2$.

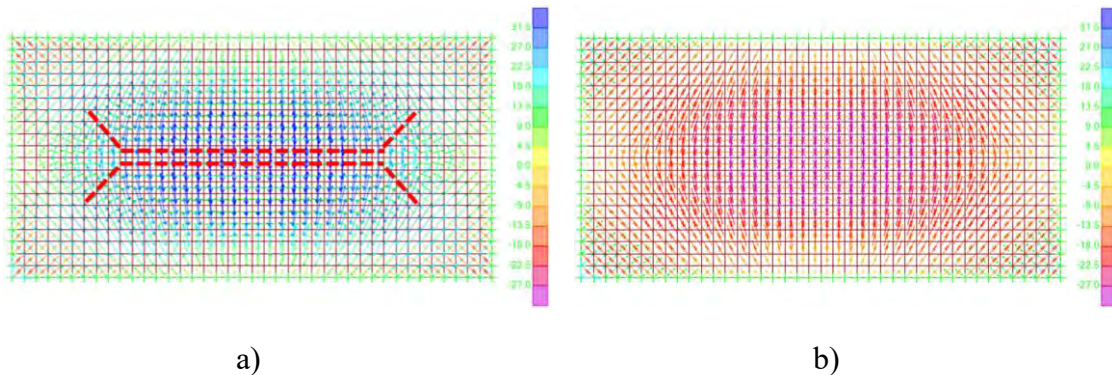


Figura 3.18 Esfuerzos principales en la LRSA, en la cara: a) inferior y b) superior

En la Figura 3.19a se muestra los esfuerzos principales a tensión en la cara inferior de la losa rectangular empotrada, de la que se observa que no existe agrietamiento en esta zona debido a que los esfuerzos a tensión presentes no superan el esfuerzo a tensión resistente del concreto. Mientras que en la cara superior, los esfuerzos principales en tensión con mayor magnitud ocurren en los bordes largos de la losa, los cuales se marcan con líneas

punteadas de color rojo, como se muestra en la Figura 3.19b. Estos esfuerzos principales se presentan al aplicarle una carga $w_d=1726 \text{ kgf/m}^2$. Se observa que el esfuerzo máximo obtenido es aproximadamente el esfuerzo de tensión $\sigma_t=29.2 \text{ kgf/cm}^2$.

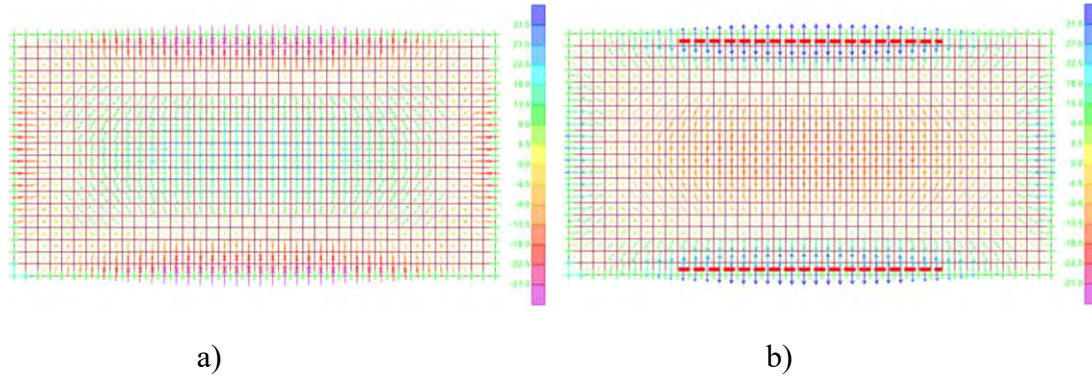


Figura 3.19 Esfuerzos principales en la LRE, en la cara: a) inferior y b) superior

3.1.5 Análisis por el método de las líneas de fluencia

Se analizan las cuatro losas macizas con el método de las líneas de fluencia, con este método se determina la carga última w_u de cada losa. En el anexo A se muestran con mayor detalle los cálculos realizados para cada losa. En la Figura 3.20 se muestran las configuraciones de las líneas de fluencia utilizadas.

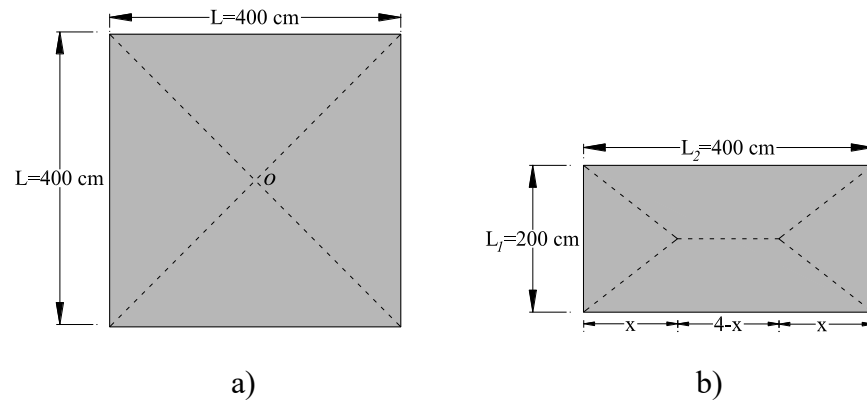


Figura 3.20 Configuración de las líneas de fluencia para la losa: a) cuadrada y b) rectangular

La carga ultima obtenida para la losa cuadrada simplemente apoyada es $w_u=1546 \text{ kgf/m}^2$. Mientras que para la losa cuadrada empotrada es $w_u=3093 \text{ kgf/m}^2$. Para la losa rectangular simplemente apoyada es $w_u=3644 \text{ kgf/m}^2$ y para la losa rectangular empotrada es $w_u=7289 \text{ kgf/m}^2$.

3.1.6 Comparación de resultados

En la Tabla 3.1 y en la Figura 3.21 se muestra la comparación de los resultados obtenidos con los análisis realizados en ANSYS y SAP2000; además se muestran los resultados obtenidos con el método de las líneas de fluencia. Se observa que los valores de las cargas de inicio de agrietamiento w_a determinadas con el software ANSYS comparados con las obtenidas con SAP2000 son mayores hasta en un 15%, 3.9% y 14.1% para la losa cuadrada empotrada, simplemente apoyada y la losa rectangular simplemente apoyada, respectivamente. Mientras que para la losa rectangular empotrada es menor en un 13.7%. Lo cual se puede atribuir a que en los análisis no lineales hechos con ANSYS existe una redistribución de esfuerzos debido al acero de refuerzo embebido en el concreto. Se observa también que los valores de la carga última w_u determinada con ANSYS es muy similar a la obtenida con el método de las líneas de fluencia en los casos en que la losa esta simplemente apoyada (SA), es decir, para la losa cuadrada simplemente apoyada la diferencia es del 8.3% y para la losa rectangular simplemente apoyada es del 3.6%; sin embargo, cuando la losa esta empotrada en todos sus bordes (EMP), el método de las líneas de fluencia tiende a proporcionar valores menores que las cargas reales de colapso, es decir, para la losa cuadrada empotrada la diferencia es del 44.9% y para la losa rectangular empotrada es del 68.9%, estos resultados se pueden deber a que en el método de las líneas de fluencia se supone que se alcanza el momento plástico simultáneamente a lo largo de todas las líneas de fluencia de la losa, lo cual no sucede en las losas empotradas, por ejemplo, en el caso de la losa rectangular empotrada, las primeras trayectorias de agrietamiento se originan en los bordes de la dirección larga y, posteriormente, se propagan hacia los bordes de la dirección corta. Por otra parte, en el caso de la losa cuadrada empotrada, las trayectorias de agrietamiento ocurren simultáneamente en los cuatro bordes de la losa, pero estas no se producen al mismo tiempo en ambas caras de la losa.

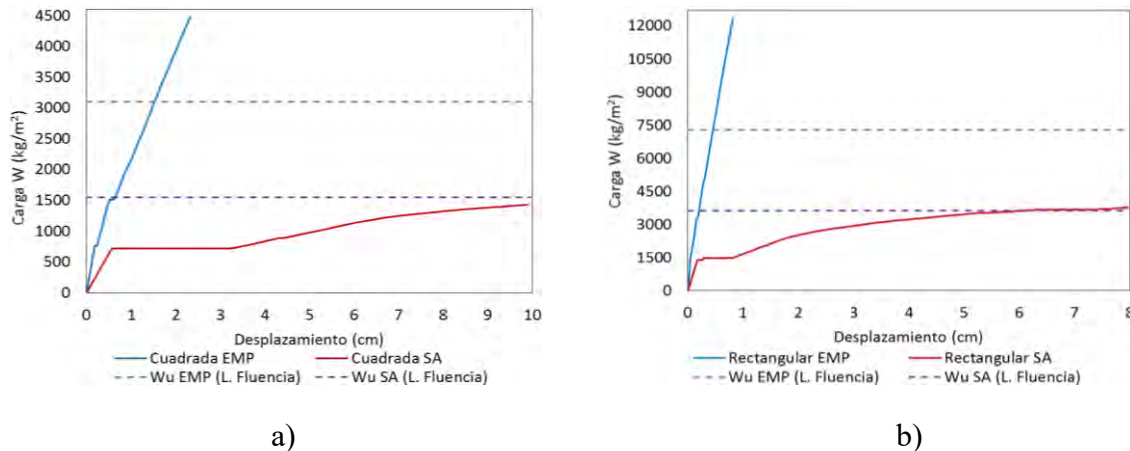


Figura 3.21 Comparación de las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de las losas: a) cuadradas y b) rectangulares

Tabla 3.1 Comparación de resultados para las losas macizas

Tipo de losa	ANSYS		SAP	L. FLUENCIA	DIFERENCIA %	
	w_a (kg/m ²)	w_u (kg/m ²)	w_a (kg/m ²)	w_u (kg/m ²)	ANSYS-SAP	ANSYS-LF
					w_a	w_u
LCE	759	4,481	660	3,093	15.0	44.9
LCSA	715	1,427	688	1,546	3.9	8.3
LRE	1,518	12,312	1,726	7,289	13.7	68.9
LRSA	1,395	3,775	1,223	3,644	14.1	3.6

3.1.7 Discusión

En las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losas de los modelos numéricos, se observa que la magnitud de w_u de las losas empotradas es aproximadamente 300% más grandes que las de las losas simplemente apoyadas, lo que hace a las losas empotradas más rígidas.

La deformación de fluencia del acero de refuerzo en las losas simplemente apoyadas, se presenta sobre los ejes de simetría de la losa que están cercanos al centro del claro, mientras que en sus bordes simplemente apoyados no se produce fluencia del acero. Por otro lado, en las losas empotradas, la deformación de fluencia ocurre en el acero de refuerzo a lo largo de sus bordes.

El agrietamiento en las losas simplemente apoyadas inicia en el centro de la losa de la cara inferior, posteriormente ocurre en las esquinas de la cara superior; mientras que en las losas empotradas, el agrietamiento inicia en los bordes de la cara superior, y posteriormente ocurre en el centro de la losa en la cara inferior, propagándose hacia las esquinas.

3.2 Losa encasetonada

En esta sección se realizan los modelos numéricos de dos de los ocho especímenes probados por Hashim y Mohammad (2000). Los especímenes originales tienen una relación de escala de 1:4, es decir, representan claros de 6 m. Tienen las propiedades siguientes: el primer espécimen es de 5x5 nervaduras cuadradas por lado en ambas direcciones, con una separación de nervaduras $S=30$ cm; mientras que el segundo espécimen es de 9x9 nervaduras cuadradas por lado en ambas direcciones, con una separación de nervaduras $S=16.7$ cm. Ambas losas encasetonadas son cuadradas de 150 cm por lado y consideradas como simplemente apoyadas en todos sus bordes, las cuales están cargadas uniformemente sobre un área de 900cm² al centro de la losa, como se muestra en la Figura 3.22, tienen una altura total $h=9.5$ cm, ancho de las vigas $W=5.2$ cm, espesor de la losa $t=2$ cm, diámetro del acero de refuerzo en las vigas de $\phi=0.8$ cm, y una malla de acero en la losa con diámetro de $\phi=0.7$ mm @ 2.5 cm, como se muestra en la Figura 3.23. El concreto tiene una resistencia a

la compresión $f'_c=306 \text{ kg/cm}^2$ (30 MPa) y se supone una relación de Poisson $\nu=0.2$. Por otro lado, el acero de refuerzo tiene un esfuerzo de fluencia $f_y=4059 \text{ kgf/cm}^2$ (398 MPa), se supone un módulo elástico $E_s=2.039 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ (199.96 GPa) y una relación de Poisson $\nu=0.3$.

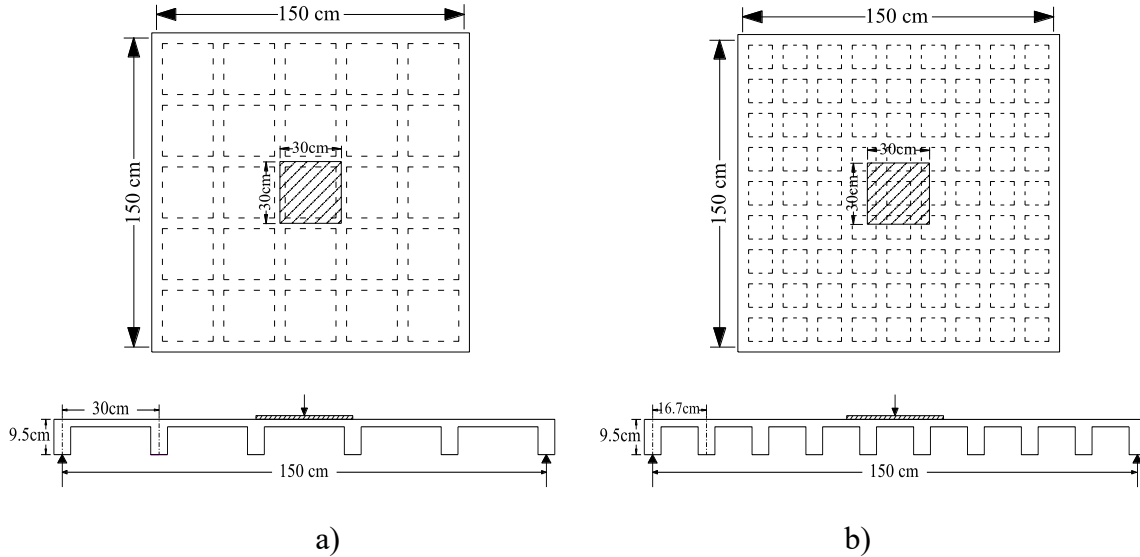


Figura 3.22 Geometría de la losa encasetonada de: a) 5x5 nervaduras y b) 9x9 nervaduras.

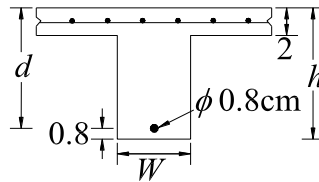


Figura 3.23 Detalle del refuerzo para ambas losas encasetonadas

Para el modelado numérico en ANSYS de cada losa encasetonada, se hicieron diferentes versiones, esto ante la falta de información sobre las propiedades mecánicas de los materiales utilizados. A continuación se describe cada una de las versiones realizadas:

Losla encasetonada de 5x5 nervaduras. Se consideraron las dimensiones, propiedades mecánicas del acero de refuerzo y la resistencia a compresión del concreto descrito al principio de este capítulo. De este modelo, mostrado en la Figura 3.24a. se hicieron quince versiones diferentes. Se propusieron valores para: el módulo de elasticidad del concreto E_c , esfuerzo a tensión del concreto σ_t , esfuerzo de fluencia del acero σ_y , módulo de endurecimiento del acero H , forma de aplicación de la carga y asignando sólo propiedades lineales a algunos elementos del concreto. En las versiones 1 a la 3 se aplicó la carga en un área de 225 cm^2 al centro de la losa. En la Tabla 3.2 se describe cada una de las versiones realizadas.

Tabla 3.2 Descripción de las versiones realizadas para la losa encasetonada de 5x5 nervaduras

Versión	E_c (kg/cm²)	σ_t (kg/cm²)	σ_y (kg/cm²)	H (kg/cm²)	Aplicación de la carga	Propiedades lineales asignadas
L5x5_V1	262,393	30	4,059	30,000	Presión	NA
L5x5_V2					Fuerzas puntuales en los nodos	
L5x5_V3					Presión	A los elementos del concreto de la losa donde se aplica la carga.
L5x5_V4		NA				
L5x5_V5		A los elementos del concreto de la losa que se encuentran directamente bajo la carga.				
L5x5_V6		NA				
L5x5_V7		60,000		30,000		
L5x5_V8	300,000	60,000				
L5x5_V9	315,000	65	100,000			
L5x5_V10	300,000	60	4,200	75,000		
L5x5_V11	30					
L5x5_V12		60	4059	30,000		
L5x5_V13	60,000					
L5x5_V14						
L5x5_V15						

Losa encasetonada de 9x9 nervaduras. Se consideraron las dimensiones, propiedades mecánicas del acero de refuerzo y la resistencia a compresión del concreto descritas al principio de este capítulo. De este modelo, mostrado en la Figura 3.24b, se hicieron catorce versiones diferentes. Se propusieron valores para: E_c , σ_t , σ_y , H , y el coeficiente de transferencia de cortante en grieta abierta β_t y en grieta cerrada β_c . Estos coeficientes β_t y β_c representan las condiciones de la cara de la grieta, donde se recomienda utilizar valores para β_c de 0.9 hasta 1.0, y para β_t valores de 0 hasta 1.0, siendo 0 una grieta “lisa” donde ocurre una pérdida total en la transferencia del cortante, y 1.0 una grieta rugosa donde no

existe pérdida en la transferencia de cortante. En todas estas versiones se aplicó la carga como presión sobre los elementos del concreto al centro de la losa. En la Tabla 3.3 se describe cada una de las versiones realizadas.

Tabla 3.3 Descripción de las versiones realizadas para la losa encasetonada de 9x9 nervaduras

Versión	E_c (kg/cm ²)	σ_t (kg/cm ²)	σ_y (kg/cm ²)	H (kg/cm ²)	β_t	β_c
L9x9_V1	262,300	30	4,059	30,000	0.65	1.0
L9x9_V2	314,760			60,000		
L9x9_V3	262,300			30,000		
L9x9_V4		1,000,000				
L9x9_V5		30,000				
L9x9_V6	60	60,000				
L9x9_V7		75,000				
L9x9_V8		150,000				
L9x9_V9		30,000		0.9	1	
L9x9_V10				0.65	0.9	
L9x9_V11				0	1	
L9x9_V12	0.1			1		
L9x9_V13	0.01			1		
L9x9_V14	262,393					

En todos los modelos sólo se analizó una cuarta parte de la losa considerando los dos ejes de simetría en la geometría y en las cargas, con el fin de ahorrar costo computacional y mejorar la convergencia. En los bordes correspondientes a los ejes de simetría se restringieron los grados de libertad perpendiculares a estos ejes, tal que la cuarta parte de estos modelos proporcionen los mismos resultados del modelo completo, como se observa en la Figura 3.24.

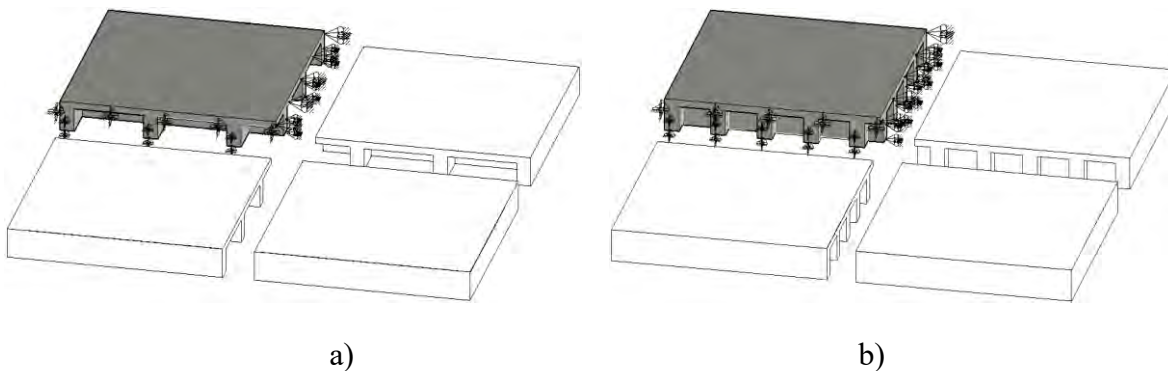


Figura 3.24 Configuración de los modelos estudiados: a) 5x5 nervaduras y b) 9x9 nervaduras

Los dibujos de los armados se realizaron en el software de dibujo AUTOCAD (Autodesk 2014), los cuales se discretizaron posteriormente en el software de pre y post proceso de elementos finitos GID (CIMNE 2014). En las Figuras 3.25 y 3.26 se muestran el armado y el mallado de las losas encasetonadas de 5x5 y de 9x9 nervaduras, respectivamente. El acero de refuerzo se discretizó con elementos barra del tipo link8 y el concreto se discretizó con elementos sólidos del tipo solid65. En la losa encasetonada de 5x5 nervaduras se tienen un total de 2108 elementos barra y 3266 elementos sólidos; por otra parte, en la losa encasetonada de 9x9 nervaduras se tienen un total de 1848 elementos barra y 8468 elementos sólidos. El acoplamiento de la malla del acero de refuerzo con el del concreto se muestra en la Figura 3.27, de los modelos importados a ANSYS (ANSYS 2013), donde la malla del acero está embebida en la malla del concreto.

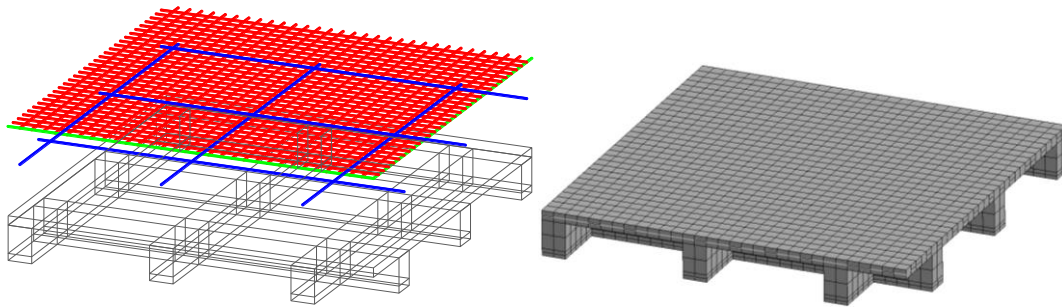


Figura 3.25 Armado y mallado de la losa encasetonada de 5x5 nervaduras

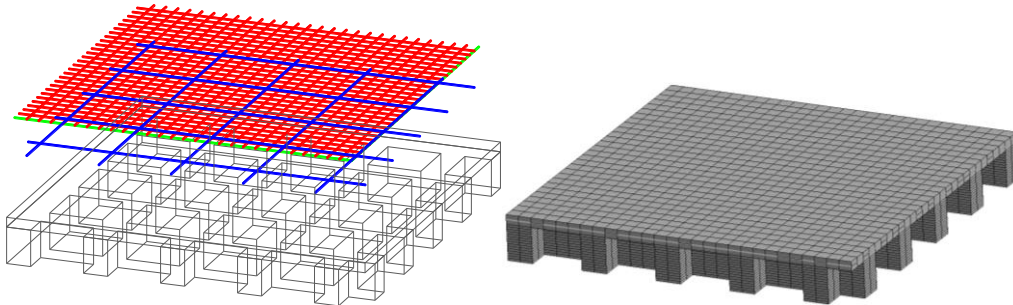


Figura 3.26 Armado y mallado de la losa encasetonada de 9x9 nervaduras

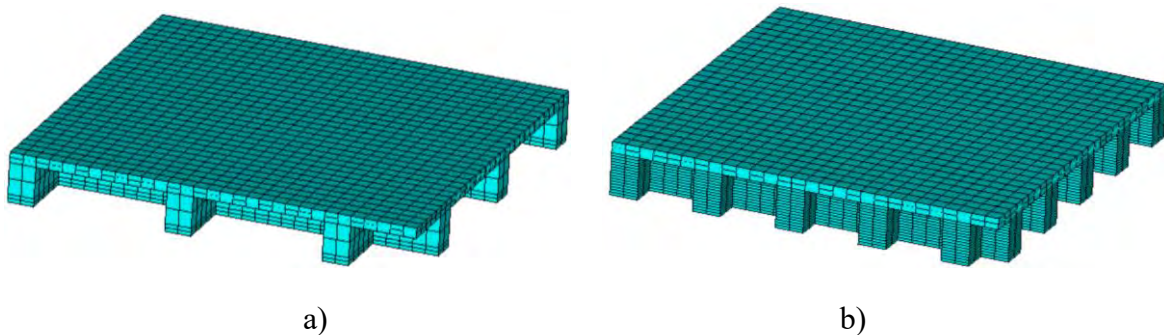


Figura 3.27 Modelos en ANSYS: a) 5x5 nervaduras y b) 9x9 nervaduras

3.2.1 Curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa

De los resultados numéricos se obtuvieron las curvas de la carga concentrada contra el desplazamiento calculado al centro de cada una de las losas. En cada modelo se utiliza como referencia la versión que tenga la carga de inicio de agrietamiento similar a la prueba experimental y que además tenga una mayor incursión en el intervalo inelástico. Se compararon estas curvas con las reportadas en las pruebas experimentales. De estas curvas se comenta lo siguiente:

- La losa encasetonada de 5x5 nervaduras cuadradas (L5x5_V14) presenta: $P_a=1044$ kg, $P_u=3778$ kg y $\delta_{m\acute{a}x}=1.3$ cm. De la comparación con la curva del experimento se observa una pendiente similar en el intervalo elástico, mientras que para el intervalo inelástico la curva del experimento presenta mayor rigidez que el modelo analizado, como se muestra en la Figura 3.28a.
- La losa encasetonada de 9x9 nervaduras cuadradas (L9x9_V13) presenta: $P_a=1891$ kg, $P_u=4861$ kg y $\delta_{m\acute{a}x}=0.39$ cm. De la comparación con la curva del experimento se observa una mayor rigidez en la curva del modelo analizado en el intervalo elástico, mientras que para el intervalo inelástico la curva del experimento presenta mayor rigidez que el modelo analizado, pues el modelo analítico en estudio colapsa antes de que pueda desarrollar toda la carga de la prueba experimental, como se muestra en la Figura 3.28b.

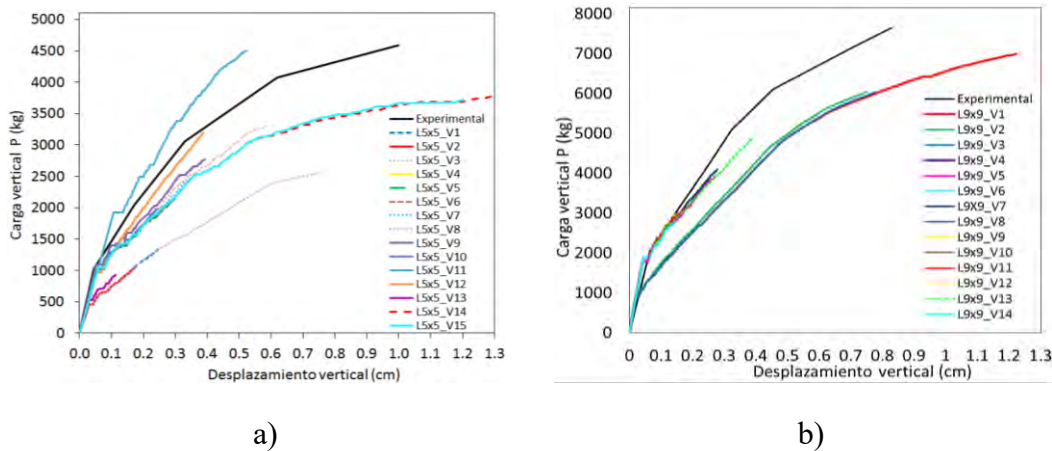


Figura 3.28 Curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa encasetonada de:
a) 5x5 nervaduras y b) 9x9 nervaduras

3.2.2 Deformaciones en el acero de refuerzo

Para revisar si el acero de refuerzo alcanza la fluencia, se analizan las deformaciones del acero de refuerzo tanto de la losa como el de las vigas, comparándolas con la deformación

de fluencia, ε_y , la cual se calcula como $\varepsilon_y = \sigma_y / E_s$. Las franjas analizadas fueron: $a-b$ y $b-c$, como se muestra en la Figura 3.29, que es donde se esperan los momentos de mayor magnitud y, en consecuencia, las deformaciones mayores.

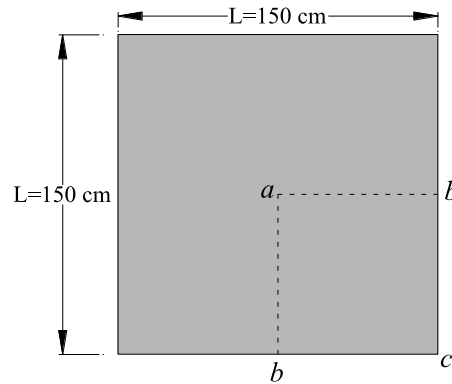


Figura 3.29 Franjas analizadas

- **Losa encasetonada de 5x5 nervaduras (L5x5_V14).** En la franja $a-b$ de la losa (Figura 3.29), las barras de acero de las vigas cercanas del centro de la losa fluyen en tensión debido a la carga distribuida, mientras que las barras de acero de la losa no alcanzan la deformación de fluencia, como se muestra en la Figura 3.30a. Mientras que las deformaciones que presentan las barras de acero que se encuentran en la franja $b-c$ de la losa, tanto para el acero de la losa como para el de las vigas no alcanzan la deformación de fluencia, como se muestra en la Figura 3.30b.

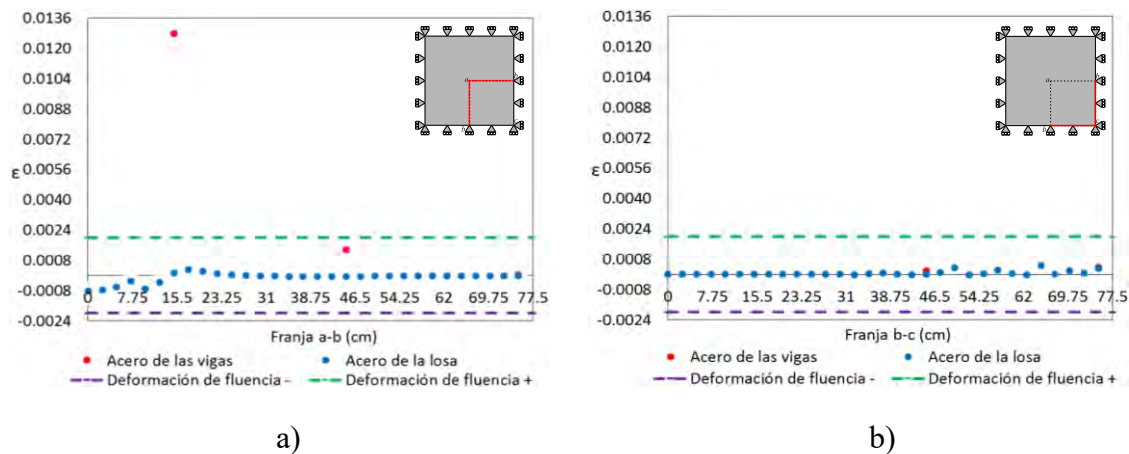


Figura 3.30 Deformaciones en el acero de la losa L5x5_V14, en la franja: a) $a-b$ y b) $b-c$

- **Losa encasetonada de 9x9 nervaduras (L9x9_V13).** En la franja $a-b$ de la losa (Figura 3.29), las barras de acero de las vigas próximas al centro de la losa están

cercanas a la fluencia en tensión debido a la carga distribuida, mientras que las barras de acero de la losa no alcanzan la deformación de fluencia, como se muestra en la Figura 3.31a. Mientras que las deformaciones que presentan las barras de acero que se encuentran en la franja $b-c$ de la losa, tanto para el acero de la losa como para el de las vigas no alcanzan la deformación de fluencia, como se muestra en la Figura 3.31b. La deformación del acero de las vigas en la franja $a-b$ de la prueba experimental probablemente si fluyan en tensión, pues la curva del experimento tiene una mayor incursión en el intervalo inelástico en comparación con el modelo numérico.

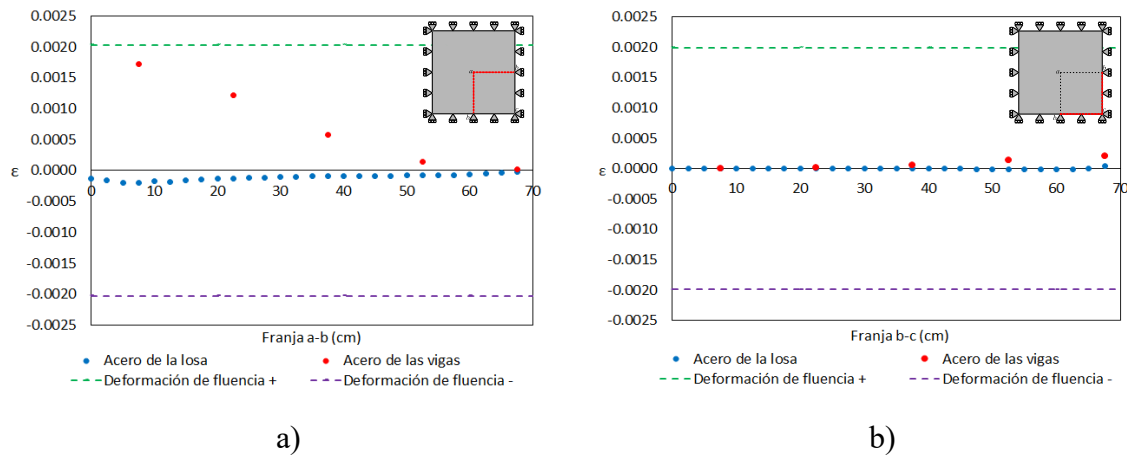


Figura 3.31 Deformaciones en el acero de la losa L9x9_V13, en la franja: a) $a-b$ y b) $b-c$

3.2.3 Trayectorias de agrietamiento

En esta sección se analizan las trayectorias de propagación en los sistemas de losas encasetonadas.

- **Losa encasetonada de 5x5 nervaduras (L5x5_V14).** El agrietamiento en la cara inferior inicia en el centro de la losa, este agrietamiento se presenta en las vigas que se encuentran al centro de la losa, posteriormente se presentan trayectorias de agrietamiento en las esquinas de la losa también presentes en las vigas, las cuales se propagan sobre las vigas de los bordes y en el espesor de la losa, como se muestra en la Figura 3.32a. Mientras que el agrietamiento en la cara superior inicia en el centro de la losa en forma de cruz, propagándose hacia las esquinas, como se muestra en la Figura 3.32b. El agrietamiento en la cara inferior inicia antes que el agrietamiento de la cara superior.

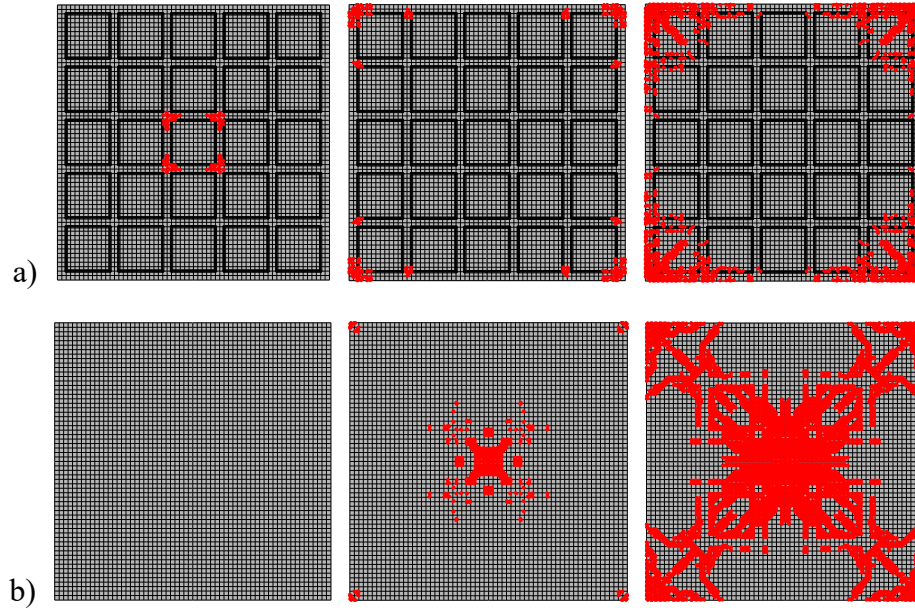


Figura 3.32 Trayectorias de agrietamiento de la L5x5, en la cara: a) inferior y b) superior

En la comparación de los modelos numéricos con la de la prueba experimental, se observa una similitud en las trayectorias de agrietamiento cuando la losa falla, pues estas trayectorias de agrietamiento de la cara superior se presentan desde el centro de la losa y hacia las esquinas en forma de cruz, como se muestra en la Figura 3.33.

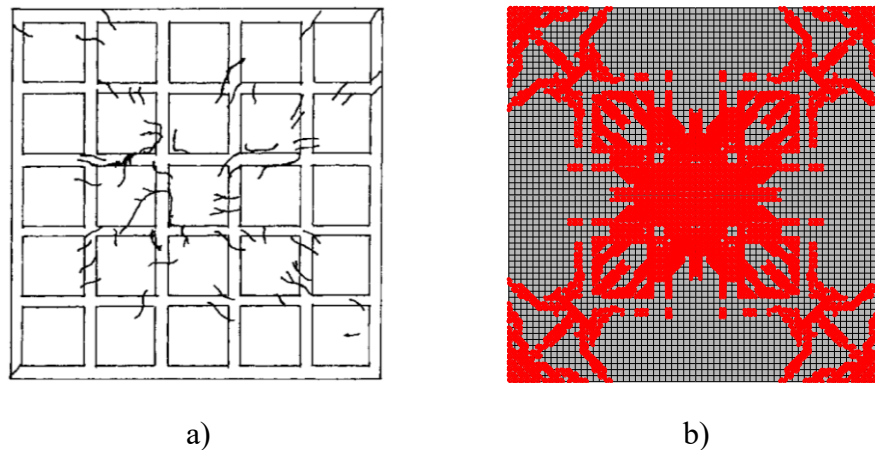


Figura 3.33 Comparación de las trayectorias de agrietamiento de la L5x5 en la cara superior: a) experimental (tomada de Hashim y Mohammad 2000) y b) ANSYS

- **Losa encasetonada de 9x9 nervaduras (L9x9_V13).** El agrietamiento en la cara inferior inicia en las esquinas de la losa, este agrietamiento se presenta en las vigas, como se muestra en la Figura 3.34a. Mientras que el agrietamiento en la cara superior se origina en el centro de la losa en forma de cruz, propagándose hacia las esquinas,

como se muestra en la Figura 3.34b. El agrietamiento en la cara superior inicia antes que el agrietamiento en la cara inferior.

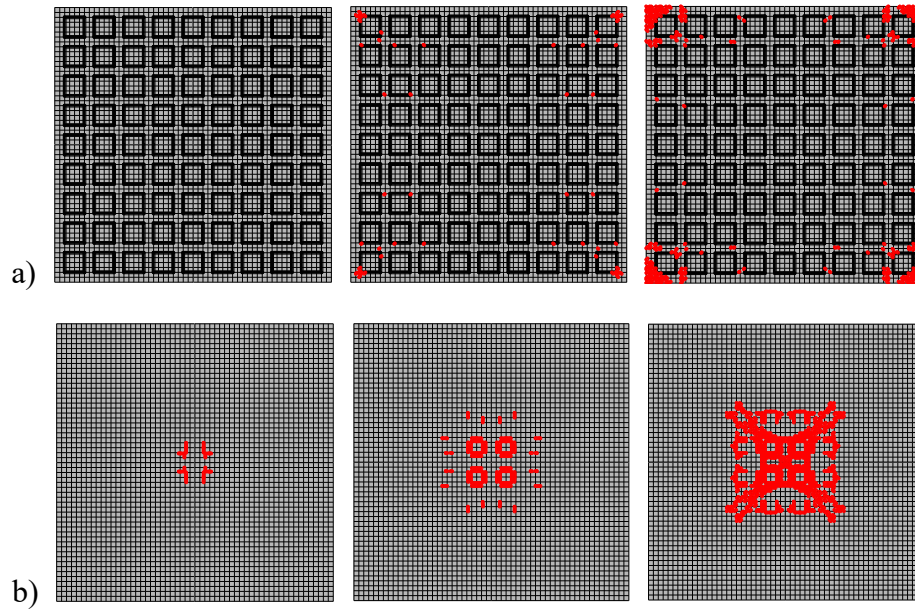


Figura 3.34 Trayectorias de agrietamiento de la L9x9, en la cara: a) inferior y b) superior

En la comparación de las trayectorias de agrietamiento de los modelos numéricos con la de la prueba experimental, se observa una similitud en las trayectorias de agrietamiento cuando falla la losa, pues estas trayectorias de agrietamiento de la cara superior se presentan desde el centro de la losa en forma de cruz, como se muestra en la Figura 3.35.

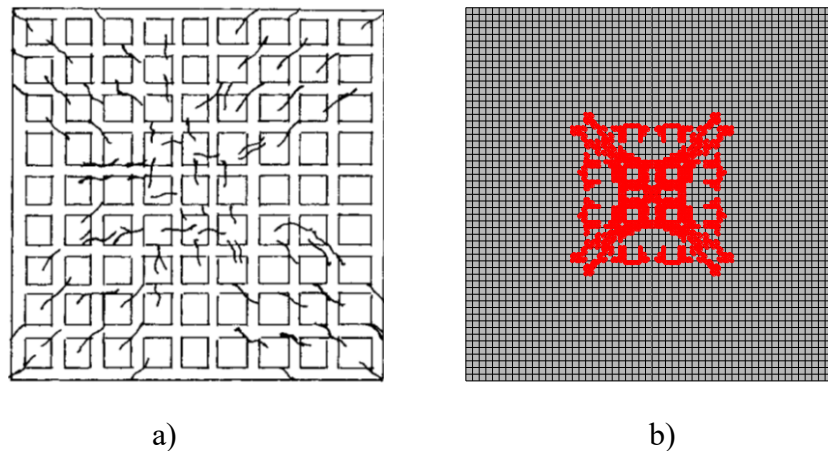


Figura 3.35 Comparación de las trayectorias de agrietamiento de la L9x9 en la cara superior: a) experimental (tomada de Hashim y Mohammad 2000) y b) ANSYS

3.2.4 Análisis elásticos en SAP2000

Se modelan las dos losas encasetonadas en SAP2000, donde se analizaron los modelos completos, pues al ser análisis elásticos, no se requiere mucho costo computacional. Se determina la carga en la que ocurre el agrietamiento en función del esfuerzo de tensión, es decir, la carga necesaria para desarrollar un esfuerzo igual al esfuerzo último a tensión en la losa.

En la Figura 3.36a se muestra los esfuerzos principales en la cara inferior de la losa encasetonada de 5x5 nervaduras cuadradas, donde se observa que no existe agrietamiento en esta zona debido a que los esfuerzos a tensión presentes no superan el esfuerzo a tensión resistente del concreto. Mientras que los esfuerzos principales en tensión con mayor magnitud sobre la cara superior forman una cruz que inicia al centro de la losa, donde se marcan con líneas punteadas de color rojo, como se muestra en la Figura 3.36b. Estos esfuerzos principales se presentan al aplicarle una carga distribuida de $w_a=8020 \text{ kg/m}^2$ al centro de la losa sobre un área de 900 cm^2 que es equivalente a una carga puntual $P_a=722 \text{ kg}$. Se observa que el esfuerzo máximo obtenido es aproximadamente el esfuerzo último a tensión $\sigma_t=30.6 \text{ kgf/cm}^2$, por lo que iniciaría el agrietamiento en esta zona puesto que se alcanza la magnitud de σ_t .

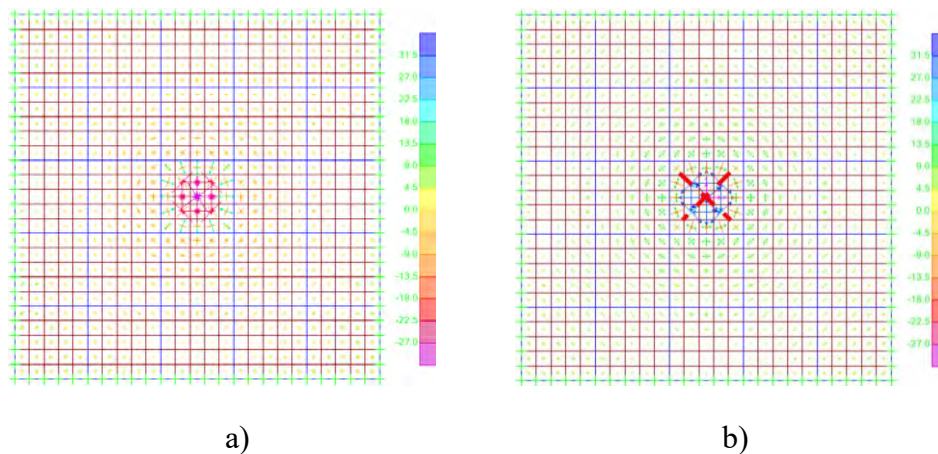


Figura 3.36 Esfuerzos principales en la L5x5, en la cara: a) inferior y b) superior

En la Figura 3.37a se muestra los esfuerzos principales en la cara inferior de la losa encasetonada de 9x9 nervaduras cuadradas, donde se observa, al igual que la losa anterior, que no existe agrietamiento en esta zona debido a que los esfuerzos a tensión presentes en la cara inferior de la losa no superan el esfuerzo último a tensión del concreto. Mientras que los esfuerzos principales en tensión con mayor magnitud sobre la cara superior forman una cruz que inicia al centro de la losa, donde se marcan con líneas punteadas de color rojo, como se muestra en la Figura 3.37b. Estos esfuerzos principales se presentan al aplicarle una carga distribuida de $w_a=21300 \text{ kg/m}^2$ al centro de la losa sobre un área de 900 cm^2 que es equivalente a una carga puntual $P_a=1917 \text{ kg}$. Se observa que el esfuerzo máximo

obtenido es aproximadamente el esfuerzo último a tensión $\sigma_t=30.6 \text{ kgf/cm}^2$, por lo que iniciaría el agrietamiento en esta zona puesto que se alcanza la magnitud del σ_t .

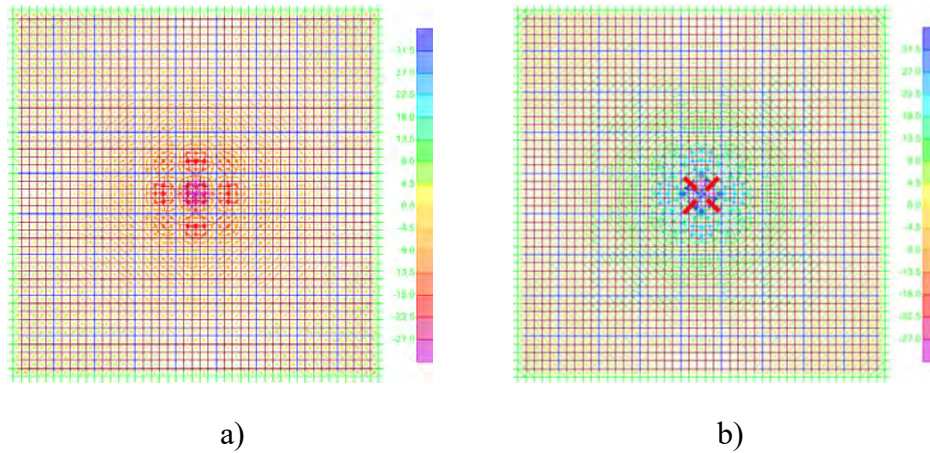


Figura 3.37 Esfuerzos principales en la L9x9, en la cara: a) inferior y b) superior

3.2.5 Comparación de resultados

En la Tabla 3.4 se muestra la comparación de los resultados obtenidos con ANSYS, SAP2000 y de las pruebas experimentales. En la L5x5 se observa que el valor de la carga de agrietamiento P_a determinada con ANSYS es mayor que la obtenida con SAP2000 en un 44.6% y muy similar con la obtenida de la prueba experimental con una diferencia del 2.4%. Mientras que para la L9x9 se observa que el valor de P_a determinada con ANSYS es menor que la obtenida con SAP2000 en un 1.4% y que la obtenida de la prueba experimental en un 7.8%.

Tabla 3.4 Comparación de resultados para las losas encasetonadas

Tipo de losa	EXPERIMENTAL		ANSYS		SAP	DIFERENCIA %		
	P_a (kg)	P_u (kg)	P_a (kg)	P_u (kg)	P_a (kg)	ANSYS-SAP	ANSYS-EXP	
						P_a	P_a	P_u
L5x5	1,020	4,587	1,044	3,778	722	44.6	2.4	21.4
L9x9	2,039	7,645	1,891	4,861	1,917	1.4	7.8	57.3

3.2.6 Discusión

Para que los resultados obtenidos de estas losas encasetonadas sean extrapolables a losas de tamaño real, se deben satisfacer dos criterios:

- El modelo y la losa real deben ser geoméricamente similares. La similitud geométrica puede establecerse mediante una escala de longitudes como la razón entre la losa real y el modelo.

- El modelo y la losa real deben tener las mismas condiciones de apoyo y la misma configuración de las cargas aplicadas. Esto requiere que todas las cargas aplicadas tengan las mismas razones (proporciones) en los dos sistemas.

De la comparación de las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa, se observa:

- Al incrementar el esfuerzo resistente a tensión del concreto σ_t , se incrementa el valor de la carga de inicio de agrietamiento P_a .
- Bajo cargas verticales de servicio no es importante la variación de los valores de E_c , σ_y y H , pues en el intervalo elástico, los sistemas de losas se comporta de manera similar y desarrollan la misma carga de inicio de agrietamiento.
- Al aplicar la carga como presión uniforme en los elementos de concreto en lugar de aplicarla como cargas puntuales en los nodos de estos elementos, se tiene una mayor convergencia y por lo tanto una mayor incursión en el intervalo inelástico de esta curva.
- Al aumentar el valor del módulo de elasticidad del concreto E_c , la curva en el intervalo inelástico se vuelve más rígida.
- Al incrementar el valor del módulo de endurecimiento del acero H se observa que la curva presenta una menor incursión en el intervalo inelástico.
- Al incrementar el valor del coeficiente de transferencia de cortante en grieta abierta β_t se observa que la curva presenta una menor incursión en el intervalo inelástico.
- Al disminuir el valor del coeficiente de transferencia de cortante en grieta cerrada β_c se observa que la curva presenta una menor incursión en el intervalo inelástico.
- Se observa una mayor rigidez en las curvas de las pruebas experimentales respecto a la de los modelos numéricos, probablemente se deba a la poca información que se tiene con respecto a las propiedades mecánicas de los materiales utilizados.

De las deformaciones en el acero de refuerzo, se observa que la fluencia en tensión se presenta en el acero de los nervios que se encuentran cercanos al centro de la losa y, que además, están sobre los ejes de simetría de la losa.

El agrietamiento en la losa, por lo general, inicia en la cara superior al centro de la losa en forma de cruz, propagándose hacia las esquinas. Mientras que en la cara inferior el agrietamiento se presenta en las vigas que están en las esquinas de la losa.

3.3 Losa maciza con un muro apoyado sobre ella

En esta sección se realiza el modelo numérico del prototipo losa-muro de transferencia probado en el laboratorio por Gómez Bernal *et al.* (2015). El espécimen original tenía las propiedades siguientes: losa cuadrada de 425 cm por lado, peralte de 12 cm, con un

recubrimiento de 2 cm. La losa fue reforzada con barras rectas en el lecho inferior en los dos sentidos a una separación de 40 cm, con columpios o bayonetas a cada 40 cm y con bastones colocados intercalados con los columpios en el lecho superior a cada 40 cm, quedando así una parrilla de 20 cm en ambos sentidos con barras de acero con diámetro $\phi=3/8''$. La Figura 3.38 muestra el detalle del armado de la losa en planta.

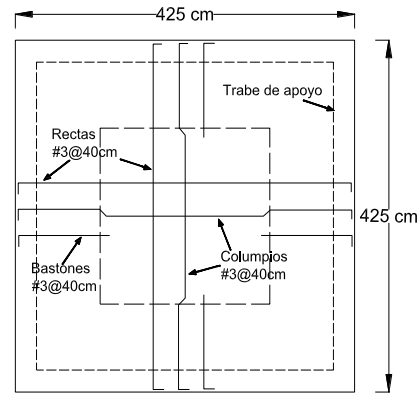


Figura 3.38 Vista en planta del armado de la losa del espécimen

En el espécimen de prueba se utilizaron dos tipos de concreto (clase 1 y clase 2). El de clase 1 se utilizó en la losa de transferencia y las trabes de apoyo, y el concreto clase 2 para los castillos, dalas y la losa cabezal.

El concreto clase 1 tiene una resistencia a la compresión $f'_c=250 \text{ kgf/cm}^2$ (24.52 MPa), resistencia a la tensión $\sigma_t=25 \text{ kgf/cm}^2$ (2.45 MPa), módulo de elasticidad $E_c=14000\sqrt{250} = 221360 \text{ kgf/cm}^2$ (21.71 GPa) (NTCC-04) y relación de Poisson $\nu=0.2$. El concreto clase 2 tiene una resistencia a la compresión $f'_c=150 \text{ kgf/cm}^2$ (14.71 MPa), resistencia a la tensión $\sigma_t=15 \text{ kgf/cm}^2$ (1.47 MPa), módulo de elasticidad $E_c=8000\sqrt{150} = 97980 \text{ kgf/cm}^2$ (9.61 GPa) (NTCC-04) y relación de Poisson $\nu=0.2$.

El muro de mampostería construido sobre el centro de la losa tiene 250 cm de longitud y 232 cm de alto. El muro está confinado por dos castillos de 14x18 cm a los extremos y dos dalas de cerramiento en la parte inferior de 14x13 cm y en la parte superior de 14x15 cm, los castillos y las dalas fueron reforzadas con cuatro barras de acero longitudinal de 3/8'' de diámetro y estribos del #2@20cm con 2 cm de recubrimiento por los cuatro lados a partir del paño exterior. Este muro está construido con tabique recocido con dimensiones 5.5x11.5x23.5 cm, resistencia a la compresión $f_m^*=50 \text{ kg/cm}^2$ (4.9 MPa), módulo de elasticidad $E_m=350f_m^*=17500 \text{ kg/cm}^2$ (1.72 GPa) (para cargas sostenidas NTCM-04). El mortero utilizado fue tipo I con esfuerzo a compresión de 110 kg/cm² (10.79 MPa), este valor no se utilizó en el modelado, pues a la mampostería se le asignó las propiedades del tabique. Además, se incluye una losa cabezal de 1 m de ancho y 10 cm de espesor en la parte superior del muro, el refuerzo de esta losa de cabezal es el mismo que el de la losa de transferencia.

Mientras que el acero de refuerzo tiene un esfuerzo de fluencia $f_y=4200 \text{ kgf/cm}^2$ (411.9 MPa), módulo elástico $E_s=2.0 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ (196.13 GPa) y relación de Poisson $\nu=0.3$. En las Figuras 3.39 y 3.40 se muestran el espécimen de prueba y la vista lateral del mismo, respectivamente.



Figura 3.39 Espécimen de prueba (adaptada de Vargas O. 2014)

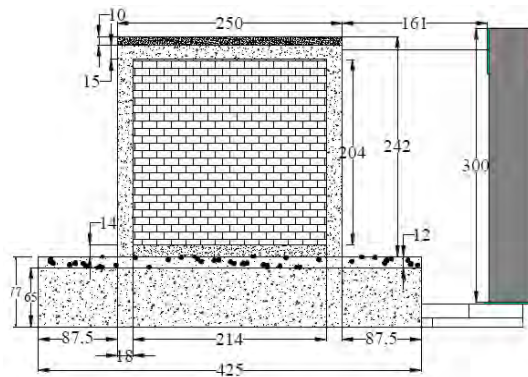


Figura 3.40 Vista lateral del espécimen, cotas en cm (adaptada de Vargas O. En proceso)

Para el modelado numérico en ANSYS se consideraron tres modelos diferentes de la losa-muro de transferencia, en cada uno de estos modelos se hicieron diferentes versiones variando tanto las propiedades mecánicas de la mampostería como las propiedades geométricas del muro, esto con el fin de estudiar el comportamiento del sistema losa-muro de transferencia tanto en los intervalos elástico e inelástico, al quitarle la dala de cerramiento, la losa cabezal y ambos elementos estructurales. Todos los modelos tienen dimensiones para la losa de 375 cm por lado y están empotrados en todos sus bordes. En la Figura 3.41 se muestra el detalle del armado en planta de la losa.

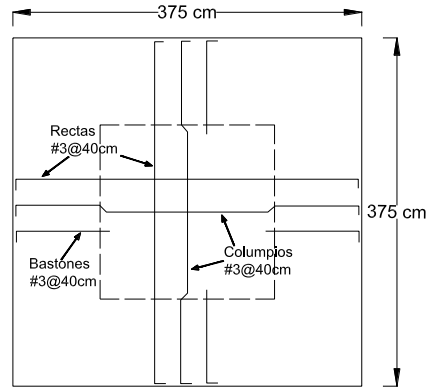


Figura 3.41 Vista en planta del armado del modelo de la losa

A continuación se describe cada uno de los modelos realizados:

- A) Modelo sin dala y sin losa (SDSL). En este modelo no se consideró la losa cabezal ni la dala inferior del muro, como se observa en la Figura 3.42a, pues en lugar de la dala se asignaron las propiedades mecánicas de la mampostería. Las propiedades del refuerzo y las dimensiones del muro de mampostería fueron las mismas que las descritas al principio de este capítulo. Se consideró una sola clase de concreto con las propiedades mecánicas siguientes: resistencia a la compresión $f'_c=150 \text{ kgf/cm}^2$ (14.71 MPa), resistencia a la tensión $\sigma_t=15 \text{ kgf/cm}^2$ (1.47 MPa) y módulo de elasticidad $E_c=150000 \text{ kgf/cm}^2$ (14.71 GPa). De este modelo se realizaron tres versiones diferentes variando las propiedades mecánicas de la mampostería, las cuales se describen a continuación:
- Primera versión (SDSL_V1). Se consideró una resistencia a la compresión de $\sigma_{cm}=103 \text{ kg/cm}^2$ (10.1 MPa), resistencia a la tensión de $\sigma_{tm}=20.6 \text{ kg/cm}^2$ (2.02 MPa) y un módulo de elasticidad $E_m=20394 \text{ kg/cm}^2$ (2 GPa).
 - Segunda versión (SDSL_V2). Se consideró $\sigma_{cm}=50 \text{ kg/cm}^2$ (4.9 MPa), $\sigma_{tm}=7.7 \text{ kg/cm}^2$ (0.76 MPa) y $E_m=17500 \text{ kg/cm}^2$ (1.72 GPa) (para cargas sostenidas NTCM-04).
 - Tercera versión (SDSL_V3). Se consideraron las mismas propiedades que la segunda versión pero restringiendo los desplazamientos laterales del muro.
- B) Modelo sin losa (SL). En este modelo no se consideró la losa de cabezal, como se observa en la Figura 3.42b. Las propiedades mecánicas de los dos tipos de concreto y las dimensiones del muro de mampostería fueron las mismas que las descritas al principio de este capítulo. De este modelo sólo se realizó una versión con las propiedades mecánicas de la mampostería siguientes:
- Se consideró $\sigma_{cm}=50 \text{ kg/cm}^2$ (4.9 MPa), $\sigma_{tm}=7.7 \text{ kg/cm}^2$ (0.76 MPa) y $E_m=17500 \text{ kg/cm}^2$ (1.72 GPa) (para cargas sostenidas NTCM-04).

C) Modelo con dala y con losa (CDL). En este modelo se consideraron todas las dimensiones y propiedades mecánicas del refuerzo y de los dos tipos de concreto descritos al principio de este capítulo. De este modelo, mostrado en la Figura 3.42c, se hicieron tres versiones diferentes variando las propiedades mecánicas de la mampostería, las cuales se describen a continuación:

- Primera versión (CDL_V1). Se consideró $\sigma_{cm}=50 \text{ kg/cm}^2$ (4.9 MPa), $\sigma_{tm}=7.7 \text{ kg/cm}^2$ (0.76 MPa) y $E_m=17500 \text{ kg/cm}^2$ (1.72 GPa) (para cargas sostenidas NTCM-04).
- Segunda versión (CDL_V2). Se consideró $\sigma_{cm}=103 \text{ kg/cm}^2$ (10.1 MPa), $\sigma_{tm}=20.6 \text{ kg/cm}^2$ (2.02 MPa) y $E_m=20394 \text{ kg/cm}^2$ (2 GPa).
- Tercera versión (CDL_V3). Se redujeron en 20% el esfuerzo a compresión y de tensión de los dos tipos de concreto, es decir, para el concreto clase 1: resistencia a la compresión $\sigma_{cc1}=200 \text{ kg/cm}^2$ (19.61 MPa), resistencia a la tensión $\sigma_{tc1}=20 \text{ kg/cm}^2$ (1.96 MPa). Mientras que para el concreto clase 2: resistencia a la compresión $\sigma_{cc2}=120 \text{ kg/cm}^2$ (11.77 MPa), resistencia a la tensión $\sigma_{tc2}=12 \text{ kg/cm}^2$ (1.18 MPa). También se redujo en 20% las propiedades mecánicas de la mampostería utilizadas en la segunda versión de este modelo, es decir, resistencia a la compresión $\sigma_{cm}=82.4 \text{ kg/cm}^2$ (8.08 MPa), resistencia a la tensión $\sigma_{tm}=16.48 \text{ kg/cm}^2$ (1.62 MPa).

En todos los modelos sólo se analizó la mitad de la losa, dividiendo en partes iguales la losa, el muro y los castillos, con el fin de ahorrar tiempo computacional y mejorar la convergencia. En el borde correspondiente al eje de simetría se restringió el grado de libertad perpendicular a este eje, tal que la mitad de estos modelos proporcionen los mismos resultados del modelo completo, como se observa en la Figura 3.42.

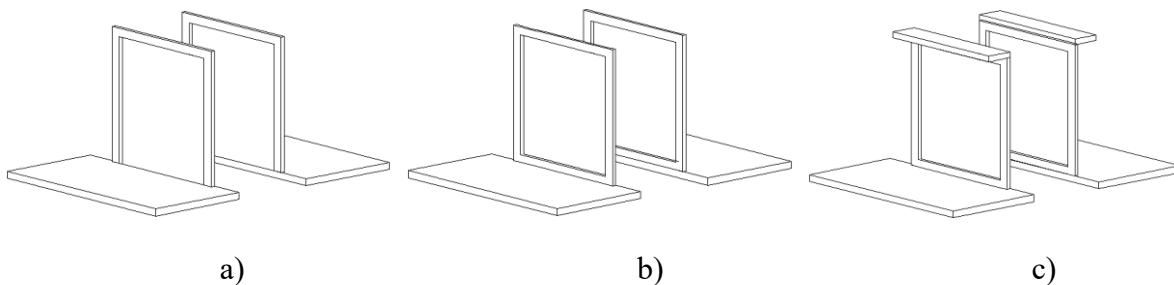


Figura 3.42 Configuración de los modelos estudiados: a) SDSL, b) SL y c) CDL

La geometría de los armados se realizaron en el software de dibujo AUTOCAD (Autodesk 2014), los cuales se discretizaron posteriormente en el software de pre y post proceso de elementos finitos GID (CIMNE 2014). En las Figuras 3.43a-c se muestran el armado y el mallado de los modelos SDSL, SL y CDL, respectivamente.

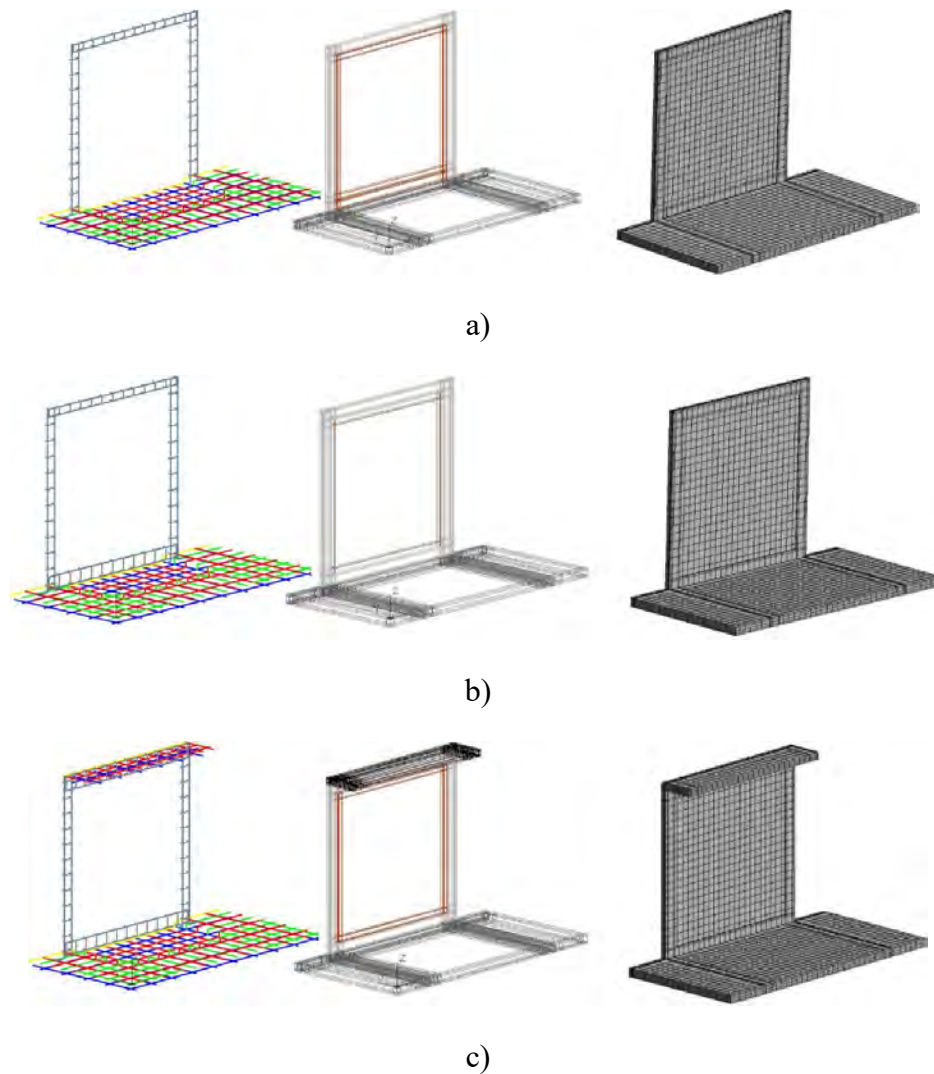


Figura 3.43 Armado y mallado de los modelos losa-muro de transferencia: a) SDSL, b) SL y c) CDL

El acero de refuerzo se discretizó con elementos barra del tipo link8 y el concreto se discretizó con elementos sólidos del tipo solid65. En el modelo SDSL se tienen un total de 1372 elementos barra y 5294 elementos sólidos (Figura 3.44a), en el modelo SL se tienen un total de 1501 elementos barra y 5338 elementos sólidos (Figura 3.44b); por otra parte, en el modelo CDL se tienen un total de 1796 elementos barra y 6088 elementos sólidos (Figura 3.44c). El acoplamiento de la malla del acero de refuerzo con el concreto se muestra en la Figura 3.44 de los modelos importados a ANSYS (ANSYS 2013), donde la malla del acero está embebida en la malla del concreto.

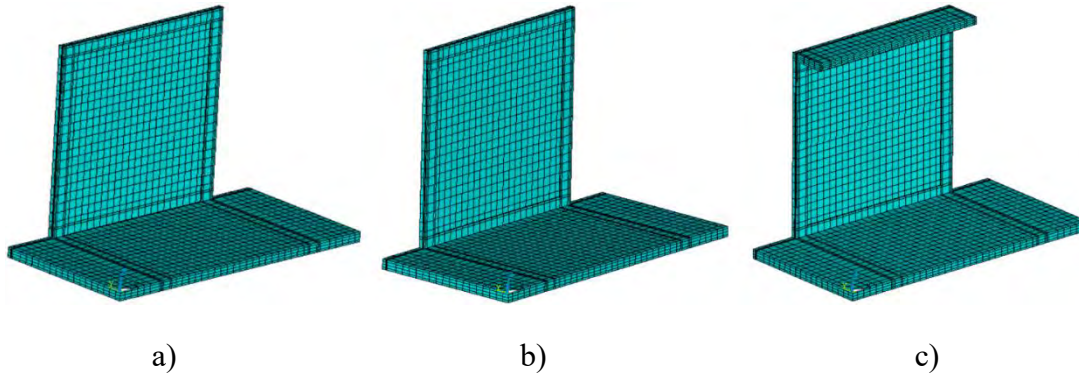


Figura 3.44 Modelos en ANSYS: a) SDSL, b) SL y c) CDL

3.3.1 Curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa

De los resultados numéricos se obtuvieron las curvas de la carga concentrada contra el desplazamiento calculado al centro de cada una de las losas. Además se comparó cada una de estas curvas con la reportada de la prueba experimental y con la obtenida numéricamente por Manzanares (2013), cabe destacar que esta última curva corresponde a un modelo similar al SDSL reportado en este trabajo, pues se utilizaron las mismas propiedades mecánicas para el concreto y las dimensiones geométricas descritas para este modelo.

De los modelos SDSL, SL y CDL se obtienen las magnitudes de la carga última y del desplazamiento vertical máximo al centro de la losa de $P_u=34980$ kg y $\delta_{m\acute{a}x}=1.13$ cm, $P_u=31200$ kg y $\delta_{m\acute{a}x}=0.56$ cm, $P_u=33180$ kg y $\delta_{m\acute{a}x}=0.62$ cm, respectivamente. De igual forma, en todos los modelos estudiados, la carga del inicio del agrietamiento ocurre en $P_a=5400$ kg, como se observa en la Tabla 3.5. De la comparación con la curva del modelo obtenido por Manzanares (2013) se observa que para el modelo SDSL todas las curvas tienen una pendiente similar tanto en el intervalo elástico como en el inelástico, con la diferencia que los modelos reportados en este trabajo tienen mayor incursión en el intervalo inelástico. Mientras que para los demás modelos analizados se tiene una mayor rigidez en las curvas de estos modelos con respecto a la curva del experimento y del reportado por Manzanares (2013). En todas las curvas de los modelos estudiados se observó una mayor rigidez con respecto a la curva del experimento, como se muestra en la Figura 3.45.

Tabla 3.5 Comparación de las cargas en los modelos estudiados

Modelo	P_a (kg)	P_u (kg)	$\delta_{m\acute{a}x}$ (cm)
SDSL	5,400	34,980	1.13
SL	5,400	31,200	0.56
CDL	5,400	33,180	0.62

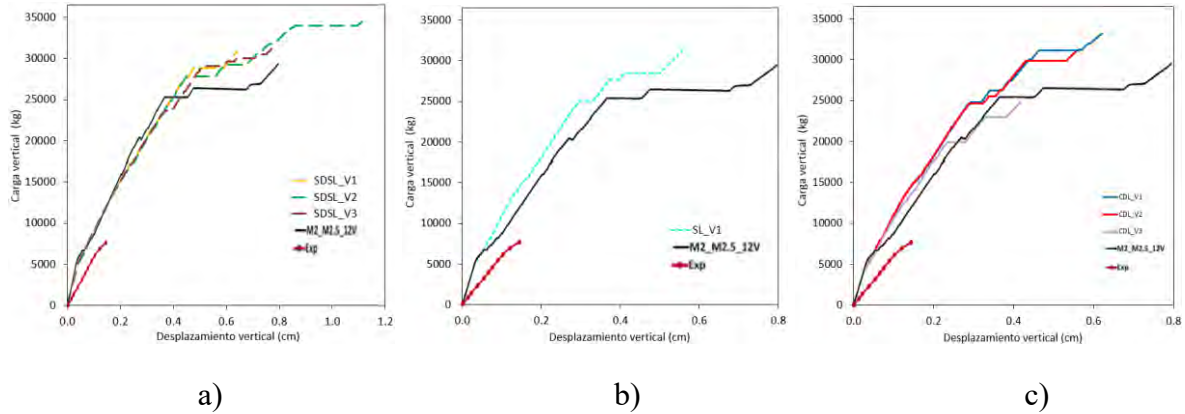


Figura 3.45 Curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa, de los modelos:
a) SDSL, b) SL y c) CDL

Al comparar las curvas de la carga contra el desplazamiento de todos los modelos numéricos con la de la prueba experimental, se observa una menor rigidez en la curva del experimento respecto a los modelos numéricos, probablemente se deba a que los modelos numéricos se supusieron empotrados a lo largo de todos sus bordes, y a que se utilizó el modulo elástico que recomiendan las NTCC-04. Sin embargo, todas las curvas coinciden en la carga del inicio del agrietamiento que ocurre en aproximadamente $P_a=5400$ kg, como se observa en la Figura 3.46.

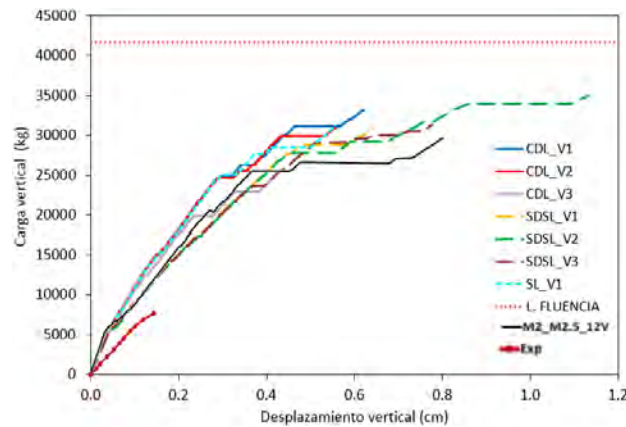


Figura 3.46 Comparación de las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de los modelos de la losa maciza con un muro apoyado sobre ella

3.3.2 Deformaciones en el acero de refuerzo

Para revisar si el acero de refuerzo alcanza la fluencia, se analizan las deformaciones del acero de refuerzo tanto del lecho superior como del lecho inferior, comparándolas con la deformación de fluencia, ε_y , la cual se calcula como $\varepsilon_y = \sigma_y / E_s$. Las franjas analizadas fueron: o-c, o-a, a-b y c-b, como se muestra en la Figura 3.47, que es donde se esperan los momentos de mayor magnitud y, en consecuencia, las deformaciones mayores. Se analizan

las deformaciones del acero de refuerzo debidas a la carga de inicio de agrietamiento P_a y las debidas a la carga P_u .

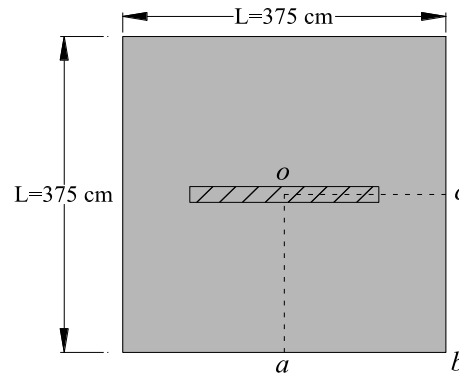


Figura 3.47 Franjas analizadas

Para la determinación de las deformaciones en las barras de acero se utilizó como base al modelo CDL_V1, pues se consideró que representa mejor a la prueba experimental, ya que se usaron todas las dimensiones y propiedades de los materiales descritos en la prueba experimental.

De las gráficas de las deformaciones en el acero de refuerzo de cada una de las franjas analizadas se comenta lo siguiente:

- **Deformaciones en el acero de refuerzo de la losa debidas a la carga de inicio de agrietamiento P_a .** Las deformaciones que presentan las barras de acero, perpendiculares al muro, en la franja $o-c$ de la losa (Figura 3.47). Las barras ubicadas en el lecho inferior presentan deformaciones en tensión, pero no alcanzan la fluencia del material, mientras que las barras en el lecho superior están sometidas a deformaciones a compresión pequeñas, como se muestra en la Figura 3.48a. Las deformaciones que presentan las barras de acero, paralelas al muro, en ambos lechos de la franja $o-a$ de la losa están sometidas a deformaciones pequeñas, como se muestra en la Figura 3.48b. Las deformaciones que presentan las barras de acero, paralelas al muro, en la franja $c-b$ de la losa, ubicadas en el empotramiento del borde, se observa que las barras tanto del lecho superior como del inferior están sometidas a pequeñas deformaciones, como se muestra en la Figura 3.48c. Las deformaciones que presentan las barras de acero, perpendiculares al muro, en la franja $a-b$ de la losa, ubicadas en el empotramiento del borde, se observa que las barras ubicadas en el lecho superior presentan deformaciones en tensión, pero no alcanzan la fluencia del material, mientras que las barras en el lecho inferior están sometidas a deformaciones a compresión pequeñas, como se muestra en la Figura 3.48d.

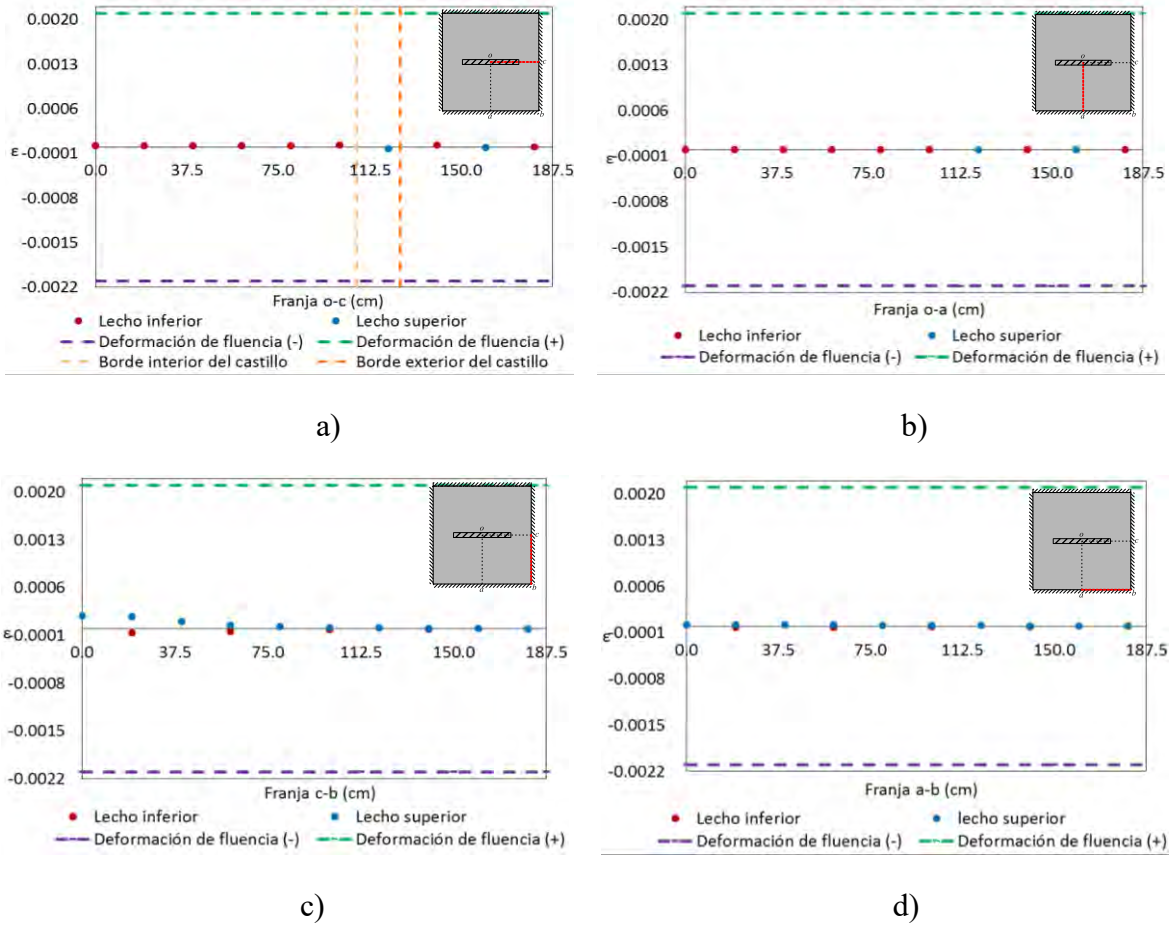


Figura 3.48 Deformaciones en el acero debidas a la carga P_u , en la franja: a) $o-c$, b) $o-a$, c) $c-b$ y d) $a-b$

- **Deformaciones en el acero de refuerzo de la losa debidas a la carga P_u .** Las deformaciones que presentan las barras de acero, perpendiculares al muro, en la franja $o-c$ de la losa (Figura 3.47). Las barras ubicadas en el lecho inferior presentan deformaciones en tensión, pero no alcanzan la fluencia del material, mientras que las barras en el lecho superior están sometidas a deformaciones a compresión pequeñas, de esta franja también se observa un cambio drástico en las deformaciones de las barras del lecho inferior que están cercanas a los castillos del muro, como se muestra en la Figura 3.49a. Las deformaciones que presentan las barras de acero, paralelas al muro, en ambos lechos de la franja $o-a$ de la losa están sometidas a deformaciones pequeñas, como se muestra en la Figura 3.49b. Las deformaciones que presentan las barras de acero, paralelas al muro, en la franja $c-b$ de la losa, ubicadas en el empotramiento del borde, se observa que las barras del lecho superior, cercanas al punto c , fluyen en tensión, mientras que las barras de acero del lecho inferior están sometidas a pequeñas deformaciones debidas a compresión, como se muestra en la Figura 3.49c. Las

deformaciones que presentan las barras de acero, perpendiculares al muro, en la franja *a-b* de la losa, ubicadas en el empotramiento del borde, se observa que las barras ubicadas en el lecho superior presentan deformaciones en tensión, pero no alcanzan la fluencia del material, mientras que las barras en el lecho inferior están sometidas a deformaciones a compresión pequeñas, como se muestra en la Figura 3.49d.

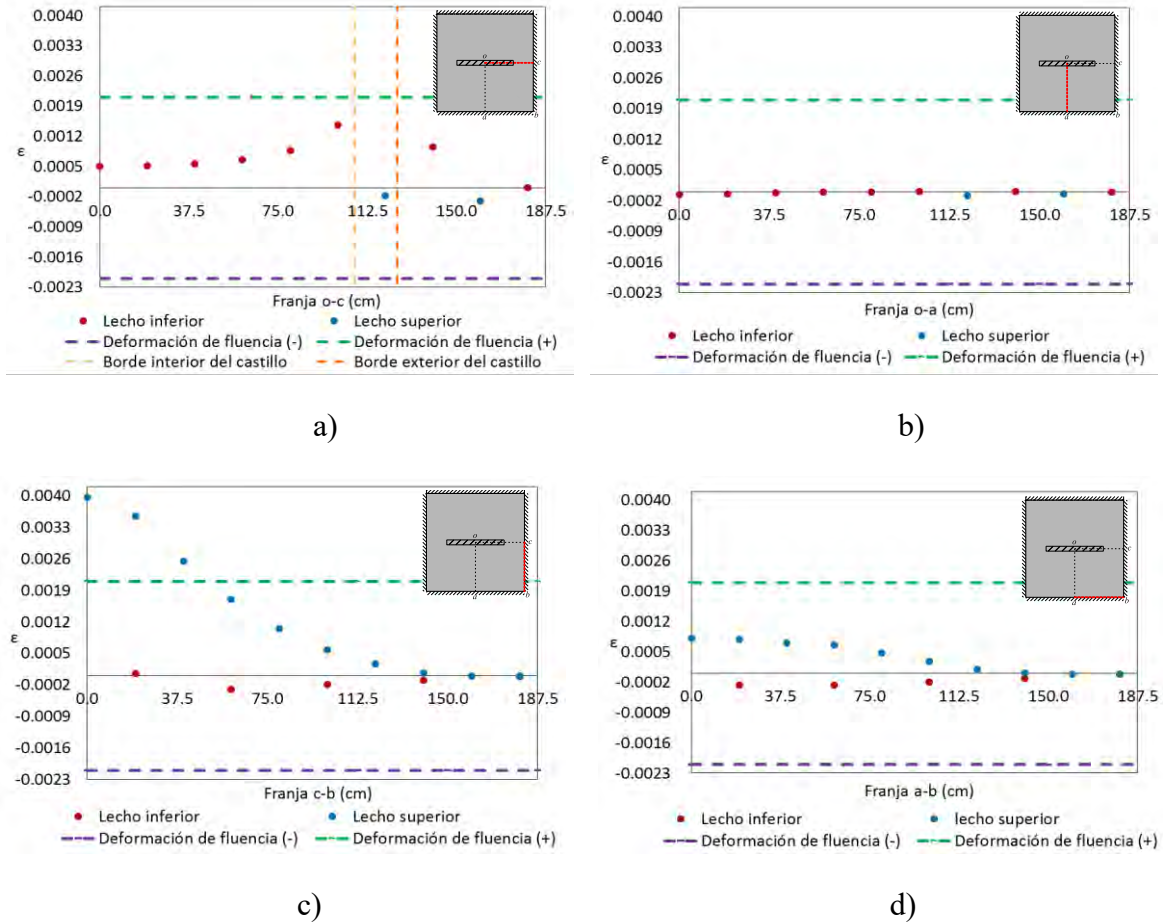


Figura 3.49 Deformaciones en el acero debidas a la carga P_u , en la franja: a) *o-c*, b) *o-a*, c) *c-b* y d) *a-b*

3.3.3 Trayectorias de agrietamiento

En esta sección se estudian las trayectorias de propagación en la losa, se analiza tanto la cara superior como la cara inferior. También se hace una comparación de estas trayectorias de propagación con las obtenidas de la prueba experimental.

El agrietamiento en la cara inferior inicia en el centro de la losa con grietas paralelas a la longitud del muro y por grietas radiales que salen de los bordes de los castillos; posteriormente, estas grietas radiales se propagan hacia las esquinas, como se muestra en la Figura 3.50a. Por otra parte, el agrietamiento en la cara superior se origina en los bordes perpendiculares al muro, y algunas grietas en los bordes de los castillos, posteriormente se

propaga hacia los demás bordes de la losa hasta formar un anillo, como se muestra en la Figura 3.50b. El agrietamiento en la cara superior ocurre primero que el agrietamiento en la cara inferior.

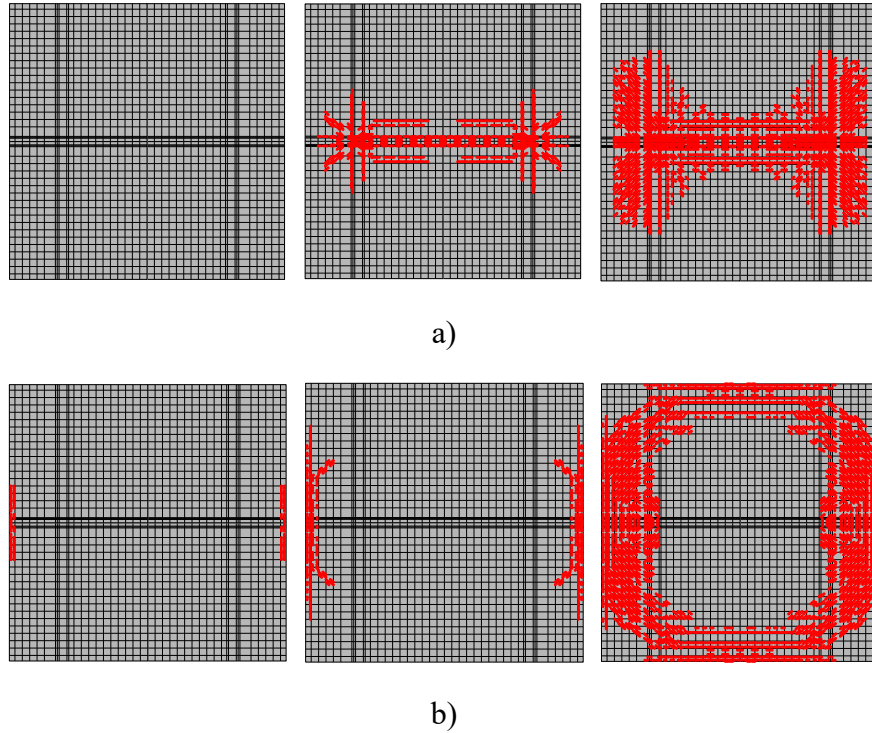


Figura 3.50 Trayectorias de agrietamiento: a) cara inferior y b) cara superior

En la comparación de las trayectorias de agrietamiento de los modelos numéricos con la de la prueba experimental, se observa una similitud tanto en las trayectorias del primer agrietamiento como en las trayectorias de agrietamiento al momento de que falla la losa. Las trayectorias del primer agrietamiento se originan en el empotramiento de los bordes perpendiculares a la dirección del muro de la cara superior de la losa, mientras que en la cara inferior no se presenta agrietamiento alguno, como se observa en la Figura 3.51. Las trayectorias de agrietamiento cuando falla la losa se presentan en la cara inferior por líneas paralelas a la longitud del muro y por líneas radiales que se propagan hacia las esquinas, mientras que en la cara superior se presentan con líneas en todos los bordes de la losa en forma de anillo, como se muestra en la Figura 3.52.

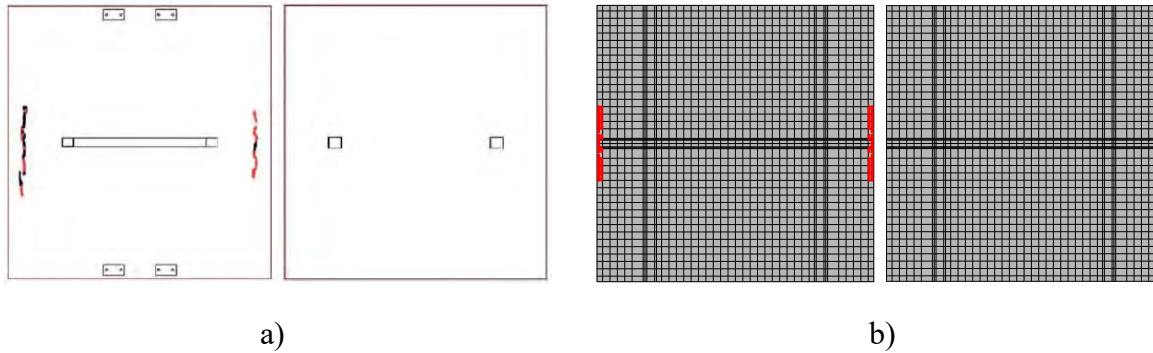


Figura 3.51 Trayectorias del primer agrietamiento en cara superior e inferior: a) experimental (tomada de Vargas. 2014) y b) ANSYS

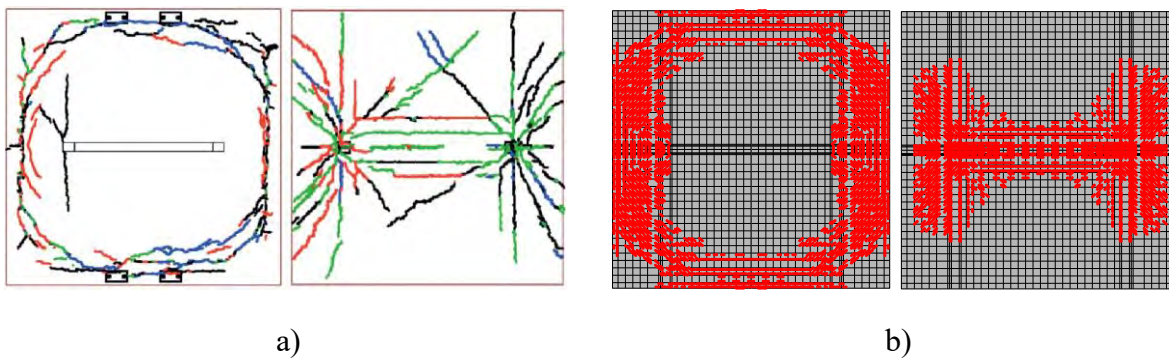


Figura 3.52 Trayectorias de agrietamiento cuando falla la losa, en cara superior e inferior: a) experimental (tomada de Vargas. 2014) y b) ANSYS

3.3.4 Análisis elástico en SAP2000

En esta sección se presenta el modelado en SAP2000 de la losa en estudio, se realizan tres modelos diferentes. El primero es una losa con carga lineal sobre ella con una longitud de 250 cm para modelar la carga del muro (Figura 3.53a), el segundo modelo corresponde a una losa con un muro apoyado sobre ella con una longitud del muro de 250 cm (Figura 3.53b), con el propósito de considerar la aportación de la rigidez del muro sobre la losa y el tercer modelo corresponde a una losa con un muro apoyado sobre todo su claro, es decir, con una longitud del muro de 375 cm (Figura 3.53c). Se consideraron las mismas propiedades de la mampostería que para el modelo CDL_V1 descrito al principio de este capítulo. En estos análisis se consideraron los modelos completos y empotrados a lo largo de todos sus bordes, pues al ser análisis elásticos, no se requiere mucho costo computacional. Se determina la carga en la que ocurre el agrietamiento en función del esfuerzo principal 1; es decir, la carga necesaria para desarrollar un esfuerzo igual al esfuerzo último de tensión en la losa.

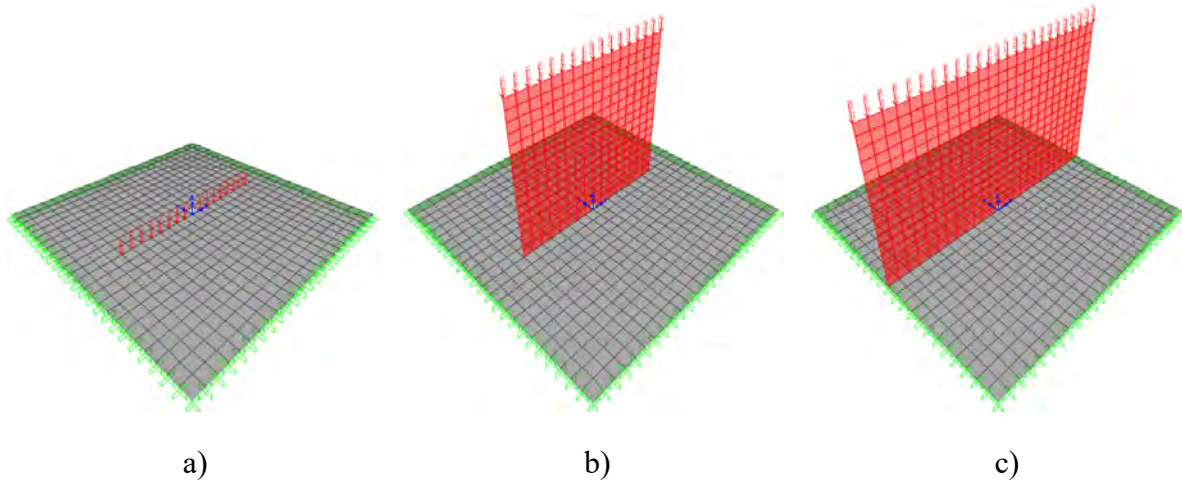


Figura 3.53 Vista en 3D de los modelos, con: a) carga lineal, b) muro de 250 cm y c) muro de 375 cm

Losa con carga lineal sobre ella. En la Figura 3.54a se muestran los esfuerzos principales en tensión sobre la cara inferior de la losa, donde se observa que estos esfuerzos son cercanos al de fluencia pero no existe agrietamiento en esta zona debido a que los esfuerzos a tensión presentes en la cara inferior no superan el esfuerzo a tensión resistente del concreto. Mientras que los esfuerzos principales en tensión con mayor magnitud sobre la cara superior ocurren en los bordes perpendiculares a la dirección de la carga, donde dichos esfuerzos se marcan con líneas punteadas de color rojo, como se muestra en la Figura 3.54b. Estos esfuerzos principales se presentan a una carga $w_d=2116 \text{ kg/m}$ ($P_d=5290 \text{ kg}$) al centro de la losa sobre una longitud de 250 cm. Se observa que el esfuerzo obtenido es aproximadamente el esfuerzo último a tensión $\sigma_t=25 \text{ kgf/cm}^2$, por lo que iniciaría el agrietamiento en esta zona puesto que se alcanza la magnitud de σ_t .

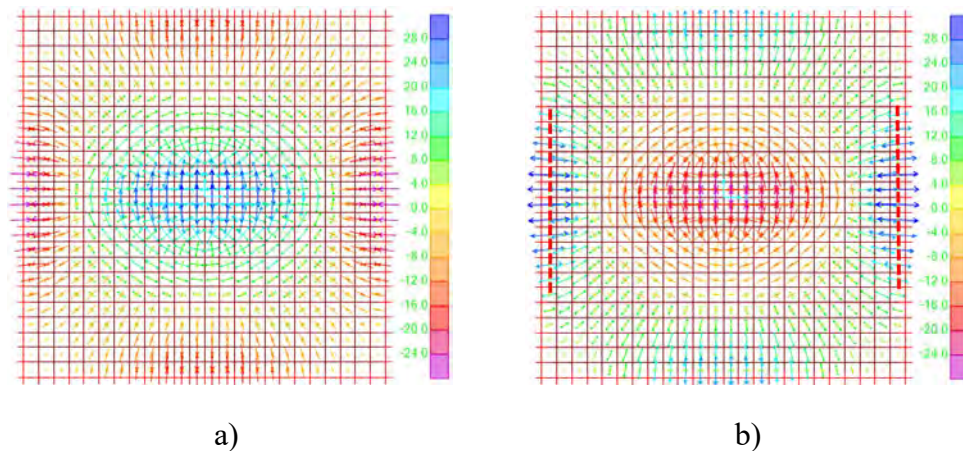


Figura 3.54 Esfuerzos principales en la losa maciza con carga lineal sobre una longitud de 250 cm: a) cara inferior y b) cara superior

Losa maciza con un muro apoyado sobre ella y con una longitud del muro de 250 cm.

En la Figura 3.55a se muestran los esfuerzos principales en tensión sobre la cara inferior de la losa, donde se observa que no existe agrietamiento en esta zona debido a que los esfuerzos a tensión son menores que el esfuerzo a tensión resistente del concreto. Mientras que los esfuerzos principales en tensión con mayor magnitud sobre la cara superior ocurren en los bordes perpendiculares a la dirección del muro, donde dichos esfuerzos se marcan con líneas punteadas de color rojo, como se muestra en la Figura 3.55b. Estos esfuerzos principales se presentan al aplicar una carga $w_a=2128$ kg/m ($P_a=5320$ kg) en la parte superior del muro que está al centro de la losa y que tiene una longitud de 250 cm. Se observa que el esfuerzo obtenido es aproximadamente el esfuerzo último a tensión $\sigma_t=25$ kgf/cm², por lo que iniciaría el agrietamiento en esta zona puesto que se alcanza la magnitud de σ_t .

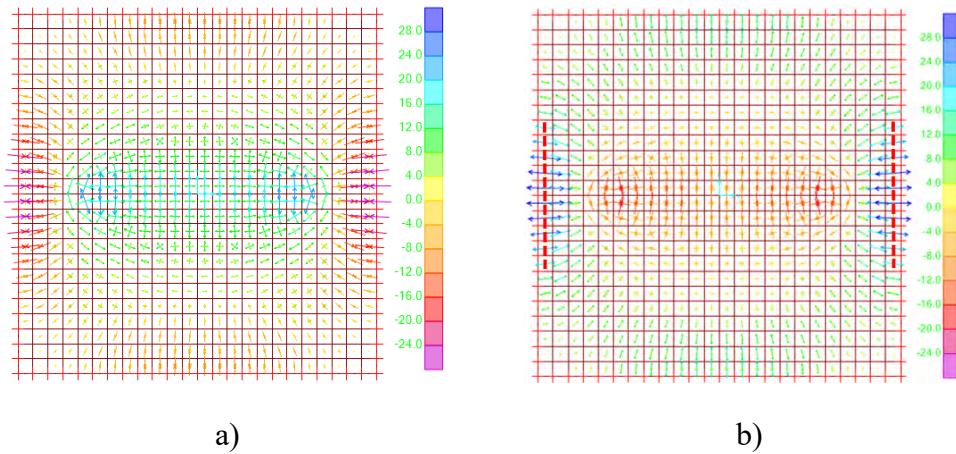


Figura 3.55 Esfuerzos principales en la losa maciza con un muro apoyado sobre ella y con una longitud del muro de 250 cm: a) cara inferior y b) cara superior

Losa maciza con un muro apoyado sobre ella y con una longitud del muro de 375 cm.

En la Figura 3.56a se muestran los esfuerzos principales en tensión sobre la cara inferior de la losa, donde se observa que no existe agrietamiento en esta zona debido a que los esfuerzos a tensión son menores que el esfuerzo a tensión resistente del concreto. Mientras que los esfuerzos principales en tensión con mayor magnitud sobre la cara superior ocurren en los bordes perpendiculares a la dirección del muro, donde dichos esfuerzos se marcan con líneas punteadas de color rojo, como se muestra en la Figura 3.56b. Estos esfuerzos principales se presentan al aplicar una carga $w_a=2407$ kg/m ($P_a=9025$ kg) en la parte superior del muro que está apoyado sobre todo el claro al centro de la losa y que tiene una longitud de 375 cm. Se observa que el esfuerzo obtenido es aproximadamente el esfuerzo último a tensión $\sigma_t=25$ kgf/cm², por lo que iniciaría el agrietamiento en esta zona puesto que se alcanza la magnitud de σ_t .

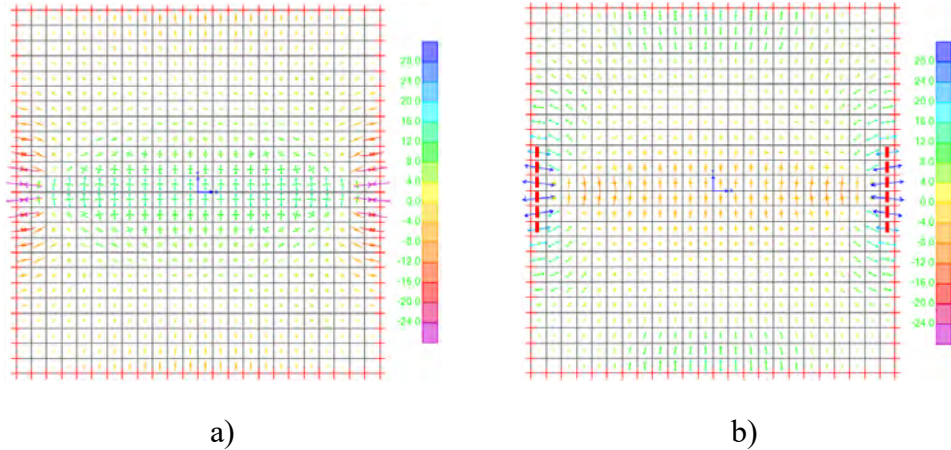


Figura 3.56 Esfuerzos principales en la losa maciza con un muro apoyado sobre ella y con una longitud del muro de 375 cm: a) cara inferior y b) cara superior

3.3.5 Análisis por el método de las líneas de fluencia

Se analiza la losa maciza con un muro apoyado sobre ella con el método de las líneas de fluencia, con este método se determina la carga última P_u de dicha losa. En el anexo B se muestra con mayor detalle los cálculos realizados para esta losa. La configuración de las líneas de fluencia propuesta para esta losa son dos trapecios y dos triángulos, donde la base menor de estos trapecios es la longitud del muro, cabe mencionar que esta configuración es parecida a la obtenida con las trayectorias de agrietamiento calculada con ANSYS, como se observa en la Figura 3.57. De esta configuración de las líneas de fluencia se obtiene una carga última $P_u=41576$ kg.

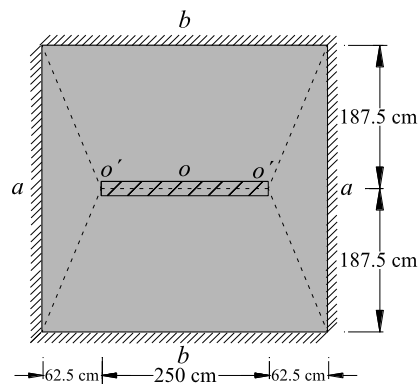


Figura 3.57 Configuración de las líneas de fluencia para la losa maciza con un muro apoyado sobre ella

El resultado obtenido de este análisis se gráfica y se compara con las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa mostrada en la Figura 3.46 de la sección 3.3.1.

3.3.6 Comparación de resultados

En la Tabla 3.6 se muestra la comparación de los resultados obtenidos con ANSYS, SAP2000, el método de las líneas de fluencia y de la prueba experimental. Se observa que la magnitud de la carga de inicio de agrietamiento P_a determinada con ANSYS es ligeramente mayor que la obtenida del modelo con un muro de longitud de 250 cm apoyado sobre la losa en SAP2000, con una diferencia del 1.5%, lo cual se atribuye a que en el análisis no lineal realizado con ANSYS existe una redistribución de esfuerzos debido al acero de refuerzo embebido en el concreto.

Al comparar el valor de la carga de inicio de agrietamiento obtenido en ANSYS con la de la prueba experimental, se observa una gran similitud en el intervalo elástico, pues en ambos resultados se obtiene una carga de inicio de agrietamiento $P_a=5400$ kg. Mientras que los resultados obtenidos en SAP2000 se tiene un valor menor debido a que el concreto reforzado se considera como un material homogéneo, en el cual se incluyen las propiedades mecánicas del acero de refuerzo y del concreto.

Se observa también que el valor de la carga última P_u determinada con el método de líneas de fluencia es mayor que la obtenida con ANSYS en un 25%, debido a que el método de las líneas de fluencia es un método de límite superior y, en consecuencia, la carga última calculada puede sobrestimarse.

Tabla 3.6 Comparación de resultados para la losa maciza con un muro apoyado sobre ella

Tipo de losa	EXP.	ANSYS		SAP		L. FLUENCIA	DIFERENCIA %	
	P_a (kg)	P_a (kg)	P_u (kg)	C. Lineal P_a (kg)	Muro P_a (kg)	P_u (kg)	ANSYS-SAP P_a	ANSYS-LF P_a
L2.5 m	5,400	5,400	33,250	5,290	5,320	41,576	1.5	25.0

3.3.7 Discusión

De la comparación de las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losa, se observa:

- Al quitarle al sistema la losa cabzal y la dala inferior, se observa que el sistema losa-muro de transferencia se vuelve más flexible.
- Bajo cargas verticales de servicio no es importante la colocación de una dala de cerramiento en la parte inferior del muro, pues en el intervalo elástico, los sistemas se comportan de manera similar y desarrollan la misma carga de inicio de agrietamiento.
- Al quitarle al sistema solo la losa cabzal, se observa que el sistema losa-muro de transferencia no pierde su rigidez con respecto al sistema que si la tiene, pero si disminuye en un pequeño porcentaje la resistencia por carga vertical.

- Al considerar el sistema completo (con losa cabezal y dala inferior), se tiene una mayor capacidad de resistir cargas verticales.
- Al disminuir la resistencia a compresión y a tensión del concreto, se disminuye la capacidad de la losa en el intervalo inelástico.
- Se observa una menor rigidez en la curva del experimento respecto a los modelos numéricos, probablemente se deba a que los modelos numéricos se supusieron empotrados a lo largo de todos sus bordes, y a que se utilizó el modulo elástico que recomiendan las NTCC-04. Sin embargo, todas las curvas coinciden en la carga de inicio de agrietamiento que ocurre en aproximadamente $P_a=5400$ kg. La carga última P_u de los modelos numéricos se encuentra entre los 31000 y 35000 kg.

Las deformaciones de fluencia se presentan en el acero de refuerzo del lecho superior perpendicular a la franja $c-b$, es decir, a los bordes empotrados perpendiculares a la dirección del muro.

El agrietamiento en la losa inicia en los bordes perpendiculares a la dirección del muro de la cara superior de la losa, posteriormente se generan algunas grietas en los bordes de los castillos y se propagan hacia los demás bordes de la losa hasta formar un anillo. Mientras que el agrietamiento en la cara inferior inicia en el centro de la losa con grietas paralelas a la longitud del muro y por grietas radiales que salen de los bordes de los castillos, posteriormente estas grietas radiales se propagan hacia las esquinas de la losa.

CAPÍTULO 4

Formulación matemática para determinar la carga de inicio de agrietamiento

En este capítulo se presenta la formulación matemática para determinar la magnitud de la carga de inicio de agrietamiento en los sistemas de losas macizas, encasetonadas y en la losa maciza con un muro apoyado sobre ella; los tres tipos de losas son de concreto reforzado y sometidas a carga vertical. En estos análisis se utiliza el criterio del esfuerzo principal máximo propuesto por Juárez-Luna (2014) y descrito en la sección 2.2; sin embargo, en este trabajo se incluye el acero de refuerzo para la distribución de esfuerzos en el espesor de la losa, por lo que el eje neutro es distinto al eje geométrico debido a que son dos materiales con propiedades mecánicas diferentes.

En el cálculo del eje neutro se utilizó el método de la sección transformada que consiste en convertir la sección de la losa en un solo material a través de una relación entre los módulos de elasticidad del acero y del concreto usando el factor de transformación n , *i.e.*,

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (4.1)$$

Usando como multiplicador el factor n se convierte el espesor de la sección transversal de la losa compuesta en el de una losa de un solo material, el cual tiene la misma resistencia que la losa compuesta. En la Figura 1.1 se muestra la distribución de esfuerzos incluyendo el acero de refuerzo de la losa, y considerando que la resistencia a la tensión del concreto es de 10 a 20% de la resistencia a compresión.

4.1 Losa maciza

En esta sección se realizan los análisis para determinar la carga de inicio de agrietamiento para la geometría de dos losas: cuadrada y rectangular, a las cuales se les asignan dos condiciones de apoyo: simplemente apoyada y empotrada. Las dimensiones y propiedades de los materiales de estas losas se describen en la sección 3.1.

En las secciones 4.1.1 a 4.1.3 se realiza el cálculo del eje neutro y el momento de inercia en el centro y en los bordes simplemente apoyados y empotrados de las losas en estudio. Posteriormente, en la sección 4.1.4 se utilizan estos resultados para obtener las cargas de inicio de agrietamiento w_a en dichas ubicaciones de las losas analizadas.

4.1.1 Eje neutro y momento de inercia al centro de la losa

El cálculo del eje neutro al centro de la losa es el mismo para las cuatro losas estudiadas, pues todas tienen la misma distribución del acero positivo. La sección transversal se muestra en la Figura 4.1.

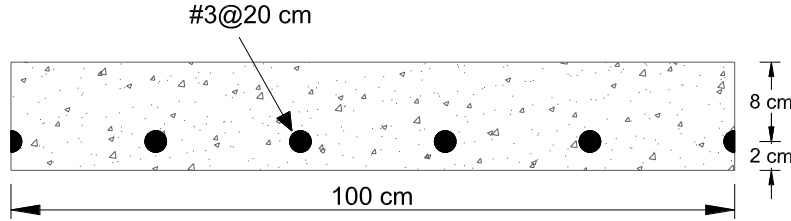


Figura 4.1 Sección transversal al centro de la losa

El análisis del esfuerzo máximo en el concreto requiere la ubicación del eje neutro. Para ello, primero se transforma el área del acero A_s en un área equivalente de concreto empleando el factor de transformación de la ecuación (4.1). Esta relación, donde $n > 1$, requiere n veces el concreto para remplazar el acero. En esta área transformada se consideró el área de concreto desplazado por las barras de tensión y así evitar la duplicación de áreas en la zona de tensión, el área transformada es $(n-1)A_s$ y la sección transformada es similar a la mostrada en la Figura 4.2. Donde t es el espesor de la losa, d es el peralte efectivo de la losa, b es el ancho unitario de losa, y c es la distancia desde la parte superior de la losa hasta el eje neutro.

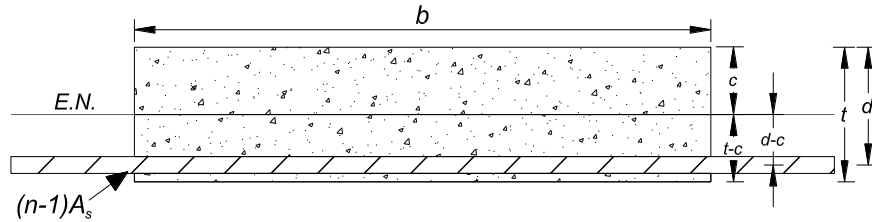


Figura 4.2 Sección transformada al centro de la losa

El cálculo de la profundidad del eje neutro c se realiza igualando el momento de primer orden del área de concreto a compresión con el momento de primer orden del área de concreto a tensión y del área de acero transformada a tensión. Por ejemplo, en la sección transformada de la Figura 4.2, se obtiene:

$$bc \left(\frac{c}{2} \right) = b(t-c) \left(\frac{t-c}{2} \right) + (n-1)A_s(d-c) \quad (4.2)$$

Igualando a cero la ecuación (4.2), se obtiene:

$$bc \left(\frac{c}{2} \right) - \left[b(t-c) \left(\frac{t-c}{2} \right) + (n-1)A_s(d-c) \right] = 0 \quad (4.3)$$

Reduciendo la ecuación (4.3), se tiene:

$$1041c - 5351 = 0 \quad (4.4)$$

Al despejar c de la ecuación (4.4), se obtiene:

$$c = \frac{5351}{1041} = 5.14 \text{ cm} \quad (4.5)$$

De este resultado se observa que la profundidad del eje neutro está más cercana a la parte inferior, que es donde está el acero en tensión.

El momento de inercia de la sección transformada de la Figura 4.2 se calcula como:

$$I = \left[\frac{bc^3}{12} + bc \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right] + \left[(n-1)A_s(d-c)^2 \right] + \left[\frac{b(t-c)^3}{12} + b(t-c) \left(\frac{(t-c)}{2} \right)^2 \right] \quad (4.6)$$

Resolviendo la ecuación (4.6) para I :

$$I = 8712.36 \text{ cm}^4 \quad (4.7)$$

4.1.2 Eje neutro y momento de inercia en los bordes simplemente apoyados

El cálculo del eje neutro en el borde simplemente apoyado de la losa sólo es aplicable para las losas que están simplemente apoyadas, cuya sección transversal se muestra en la Figura 4.3.

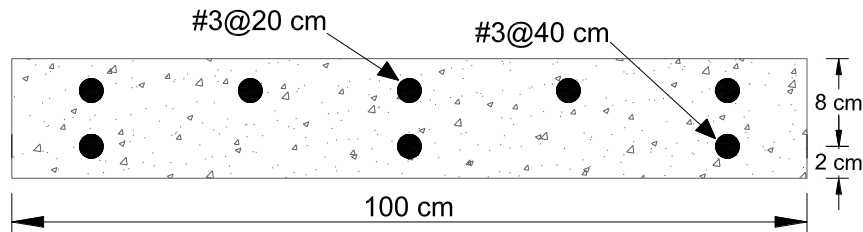


Figura 4.3 Sección transversal en el borde de la losa

El procedimiento para el cálculo de la profundidad del eje neutro c es similar que el descrito en la sección anterior, pero con la diferencia que también se considera el acero en compresión presente en la sección transversal de la losa. Para tener en cuenta el área de concreto desplazado por las barras de tensión y de compresión y así evitar duplicar estas áreas, las áreas transformadas son: $(n-1)A_s$ y $(n-1)A'_s$, respectivamente. La sección transformada es similar a la mostrada en la Figura 4.4, donde d' es el peralte efectivo en compresión.

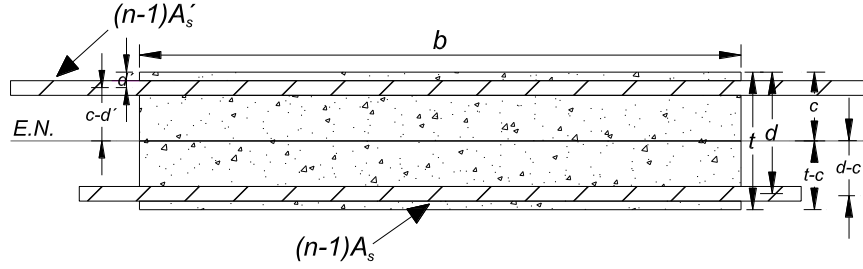


Figura 4.4 Sección transformada en el borde simplemente apoyado

El cálculo de c se realiza de manera similar que en la sección anterior, se iguala el momento de primer orden del área de concreto y del acero transformada a compresión con el momento de primer orden del área de concreto y del acero transformada a tensión. De la Figura 4.4 se obtiene:

$$bc\left(\frac{c}{2}\right) + (n-1)A'_s(c-d') = b(t-c)\left(\frac{t-c}{2}\right) + (n-1)A_s(d-c) \quad (4.8)$$

Igualando a cero la ecuación (4.8), se obtiene:

$$bc\left(\frac{c}{2}\right) + (n-1)A'_s(c-d') - \left[b(t-c)\left(\frac{t-c}{2}\right) + (n-1)A_s(d-c) \right] = 0 \quad (4.9)$$

Reduciendo la ecuación (4.9), se obtiene:

$$1070c - 5298 = 0 \quad (4.10)$$

Al despejar c de la ecuación (4.10), se obtiene:

$$c = \frac{5298}{1070} = 4.95 \text{ cm} \quad (4.11)$$

En la ecuación (4.11) se observa que c está más cercana a la parte superior, que es donde se tiene mayor cantidad de acero.

El momento de inercia de la sección transformada de la Figura 4.4 se calcula como:

$$I = \left[\frac{bc^3}{12} + bc\left(\frac{c}{2}\right)^2 \right] + \left[(n-1)A'_s(c-d')^2 \right] + \left[\frac{b(t-c)^3}{12} + b(t-c)\left(\frac{(t-c)}{2}\right)^2 \right] + \left[(n-1)A_s(d-c)^2 \right] \quad (4.12)$$

Resolviendo la ecuación (4.12) para I , se obtiene:

$$I = 8963.49 \text{ cm}^4 \quad (4.13)$$

4.1.3 Eje neutro y momento de inercia en los bordes empotrados

El cálculo del eje neutro en el borde empotrado sólo es aplicable para las losas que están empotradas en todos sus bordes. La sección transversal es la misma que la mostrada en la Figura 4.3.

El procedimiento para el cálculo de la profundidad del eje neutro es similar que el descrito en la sección anterior, pero considerando que el acero en compresión se encuentra ahora en el lecho inferior y el acero en tensión se encuentra en el lecho superior de la losa. Además la profundidad del eje neutro c se mide desde la parte inferior de la losa hasta el eje neutro. La sección transformada es similar a la mostrada en la Figura 4.5.

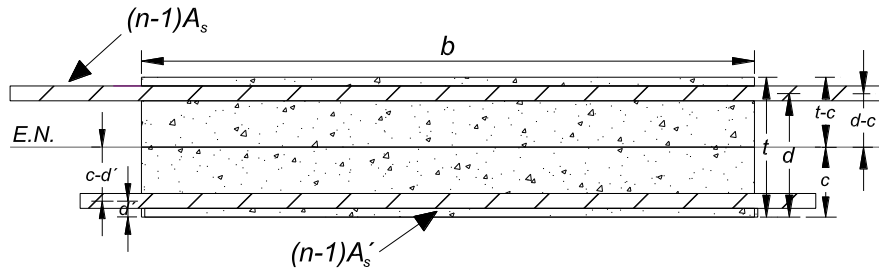


Figura 4.5 Sección transformada en el borde empotrado

El cálculo de la profundidad del eje neutro c se realiza de forma similar que en la sección anterior. De la Figura 4.5 y reduciendo la ecuación (4.9), se obtiene:

$$1070c - 5404 = 0 \quad (4.14)$$

Al despejar c de la ecuación (4.14), se obtiene:

$$c = \frac{5404}{1070} = 5.05 \text{ cm} \quad (4.15)$$

De este resultado se observa que la profundidad del eje neutro está más cercana a la parte superior, que es donde hay mayor cantidad de acero.

El momento de inercia de la sección transformada de la Figura 4.5 se calcula al resolver la ecuación (4.12), donde se obtiene:

$$I = 8963.49 \text{ cm}^4 \quad (4.16)$$

4.1.4 Carga de inicio de agrietamiento

En esta sección se obtienen las cargas de inicio de agrietamiento de las losas macizas utilizando los resultados obtenidos de las secciones 4.1.1 a 4.1.3 de este trabajo. En la Tabla 4.1 se muestran los resultados obtenidos de las cuatro losas macizas: losa cuadrada simplemente apoyada (LCSA), cuadrada empotrada (LCE), rectangular simplemente

apoyada (LRSA) y rectangular empotrada (LRE). Se aplicó una carga uniformemente distribuida de 0.05 kg/cm^2 a todos los modelos de elementos finitos realizados en el software SAP2000, posteriormente se ubicaron en cada modelo la magnitud máxima del valor absoluto de los momentos principales m_1 y m_2 cuyos valores se muestran como m_m . Se analizaron los bordes y el centro de cada losa, debido a que el armado y por consiguiente el eje neutro son diferentes en cada una de estas ubicaciones.

El esfuerzo en la fibra más alejada del concreto a tensión σ_m se obtiene con la fórmula de la flexión, ecuación (4.17), donde m_m es el momento máximo del modelo de elementos finitos, I es el momento de inercia y $t-c$ es la distancia de la fibra más alejada del concreto a tensión.

$$\sigma_m = \frac{m_m}{I}(t-c) \quad (4.17)$$

La carga de inicio de agrietamiento se obtiene con la ecuación (4.18), donde w es la carga aplicada al modelo de elementos finitos, σ_t es el esfuerzo a tensión del concreto y σ_m es el esfuerzo en la fibra más alejada del concreto a tensión obtenido de la ecuación (4.17).

$$w_a = \frac{w\sigma_t}{\sigma_m} \quad (4.18)$$

Tabla 4.1 Cargas de inicio de agrietamiento en losas macizas

Tipo de losa	w (kg/cm ²)	m_m (kg-cm/cm)	Posición en la losa	c (cm)	I (cm ⁴)	σ_m (kg/cm ²)	w_a (kg/m ²)	Diferencia (%)
LCSA	0.05	353.4	Centro	5.14	8,712.36	19.694	741	0.94
			Bordes	4.95	8,963.49	19.895	734	
LCE		368.14	Centro	5.14	8,712.49	20.517	712	0.84
			Bordes	5.05	8,963.49	20.344	718	
LRSA		198.92	Centro	5.14	8,712.36	11.086	1,317	0.99
			Bordes	4.95	8,963.49	11.199	1,304	
LRE		140.98	Centro	5.14	8,712.36	7.857	1,858	0.85
			Bordes	5.05	8,963.36	7.791	1,874	

4.1.5 Discusión

De los resultados mostrados en la Tabla 4.1, se observa que en el caso de losas que están simplemente apoyadas, el agrietamiento iniciaría en los bordes debido a que la carga de inicio de agrietamiento es menor en esta zona que en el centro de la losa, y pasa todo lo contrario para las losas que están empotradas a lo largo de todos sus bordes. La magnitud de la carga de inicio de agrietamiento es mayor al centro de la losa que en los bordes en el caso de las losas simplemente apoyadas, con una diferencia de 7 kg/m^2 (0.94%) en la

LCSA y de 13 kg/m^2 (0.99%) en la LRSA; mientras que ocurre lo contrario para el caso de las losas empotradas, con una diferencia de 6 kg/m^2 (0.84%) en la LCE y de 16 kg/m^2 (0.85%) en la LRE.

4.2 Losa encasetonada

En esta sección se realizan los análisis para la geometría de dos losas encasetonadas: de 5×5 y de 9×9 nervaduras cuadradas, ambas losas tienen las mismas condiciones de apoyo, es decir, están simplemente apoyadas a lo largo de todos sus bordes. Las dimensiones y propiedades de los materiales de estas losas se describen en la sección 3.2.

En la sección 4.2.1 se calcula el eje neutro y el momento de inercia al centro de las losas. Posteriormente, en la sección 4.2.2 se utilizan estos resultados para obtener las cargas de inicio de agrietamiento.

4.2.1 Eje neutro y momento de inercia al centro de la losa

El cálculo del eje neutro al centro de la losa es el mismo para las dos losas estudiadas, pues tienen el mismo armado. Sólo se considera el espesor de la losa, pues el momento máximo se presenta al centro de la losa donde no hay vigas de las nervaduras. La sección transversal de la losa se muestra en la Figura 4.6 y la sección transformada se muestra en la Figura 4.7.

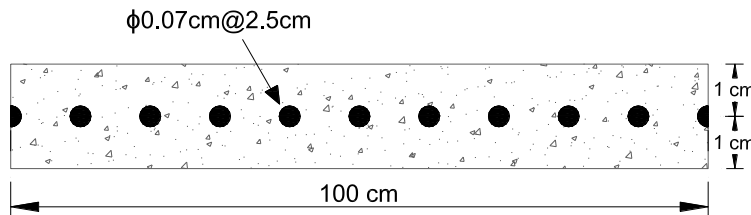


Figura 4.6 Sección transversal de la losa

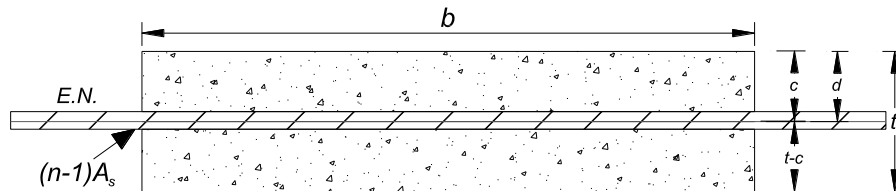


Figura 4.7 Sección transformada de la losa

El cálculo de c se realiza igualando el momento de primer orden del área de concreto a compresión con el momento de primer orden del área de concreto a tensión y del área de acero transformada. Por ejemplo, para la sección transformada de la Figura 4.7 se utiliza la ecuación (4.3).

Reduciendo la ecuación (4.3):

$$201c - 201 = 0 \quad (4.19)$$

Al despejar c de la ecuación (4.19), se obtiene:

$$c = \frac{201}{201} = 1cm \quad (4.20)$$

De este resultado se comprueba que el eje neutro y el eje geométrico coinciden, pues las barras de acero de la losa están colocadas exactamente al centro de la sección transversal.

El momento de inercia de la sección transformada de la Figura 4.7 se calcula con la ecuación (4.6), con lo que se obtiene:

$$I = 66.67cm^4 \quad (4.21)$$

4.2.2 Carga de inicio de agrietamiento

En esta sección se obtienen las cargas de inicio de agrietamiento de las losas encasetonadas utilizando los resultados obtenidos de la sección 4.2.1 de este trabajo.

En la Tabla 4.2 se muestran los resultados obtenidos de las dos losas encasetonadas: con 5x5 nervaduras cuadradas (LE5X5) y con 9x9 nervaduras cuadradas (LE9X9). En el caso del modelo de la losa con 5x5 nervaduras realizado en SAP2000, se aplicó una carga uniformemente distribuida de $w=0.5 \text{ kg/cm}^2$ sobre un área de 900 cm^2 al centro de la losa, como se indica en la sección 3.2, mientras que para la losa de 9x9 nervaduras, la carga uniformemente distribuida fue de $w=1.5 \text{ kg/cm}^2$, la cual se aplicó sobre la misma área.

Para el cálculo del esfuerzo σ_m y la carga de inicio de agrietamiento w_a se utilizaron las ecuaciones (4.17) y (4.18), respectivamente. Mientras que para el cálculo de la resultante de esta carga de inicio de agrietamiento al centro de la losa P_a se obtiene al multiplicar la ecuación (4.18) con el área de 900 cm^2 .

Tabla 4.2 Cargas de inicio de agrietamiento en losas encasetonadas

Tipo de losa	w (kg/cm ²)	m_m (kg-cm/cm)	Posición en la losa	c (cm)	I (cm ⁴)	σ_m (kg/cm ²)	w_a (kg/m ²)	P_a	
								(kg)	(kN)
LE5X5	0.5	12.72	Centro	1	66.67	19.08	8,019	721.7	7.08
LE9X9	1.5	14.37	Centro			21.55	21,294	1,916.5	18.79

4.2.3 Discusión

De los resultados mostrados en la Tabla 4.2, se observa que la losa encasetonada de 5x5 nervaduras se agrietaría a una carga menor que la necesaria para agrietar a la losa encasetonada de 9x9 nervaduras cuadradas.

Se observa también que el eje neutro no cambia con respecto al eje geométrico, pues el acero de la malla electrosoldada presente en la losa está colocado al centro de la sección transversal de la capa de compresión. Por esta razón, la magnitud de la carga de inicio de agrietamiento es la misma que la obtenida sin considerar la presencia de este acero de refuerzo y del obtenido con SAP2000.

4.3 Losa maciza con un muro apoyado sobre ella

En esta sección se realizan los análisis para una losa maciza cuadrada empotrada con un muro apoyado sobre ella. Las dimensiones y propiedades de los materiales de esta losa se describen en la sección 3.3.

En las secciones 4.3.1 y 4.3.2 se calcula el eje neutro y el momento de inercia en el centro y en el borde empotrado de la losa. Posteriormente, en la sección 4.3.3 se utilizan estos resultados para obtener la carga de inicio de agrietamiento en estas zonas.

4.3.1 Eje neutro y momento de inercia al centro de la losa

En la Figura 4.8 se muestra la sección transversal al centro de la losa.

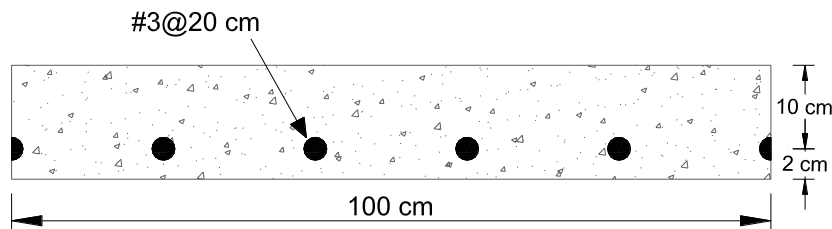


Figura 4.8 Sección transversal al centro de la losa

Para el análisis de la ubicación del eje neutro se utiliza la Figura 4.2 de la sección 4.1.1, donde se muestra la sección transformada al centro de la losa. De aquí se sustituyen las dimensiones correspondientes para la losa en estudio.

El cálculo de c se realiza igual que en las secciones anteriores. Se utiliza la ecuación (4.3) de la sección 4.1.1, donde se reduce esta ecuación para la losa en estudio:

$$1229c - 7486 = 0 \quad (4.22)$$

Al despejar c de la ecuación (4.22), se obtiene:

$$c = \frac{7486}{1229} = 6.09 \text{ cm} \quad (4.23)$$

De este resultado se observa que la profundidad del eje neutro está más cercana a la parte inferior que es donde está el acero en tensión.

El momento de inercia de la sección transformada se calcula con la ecuación (4.6), con lo que se obtiene:

$$I = 14847.37 \text{ cm}^4 \quad (4.24)$$

4.3.2 Eje neutro y momento de inercia en el borde empotrado

En la Figura 4.9 se muestra la sección transversal en el borde de la losa.

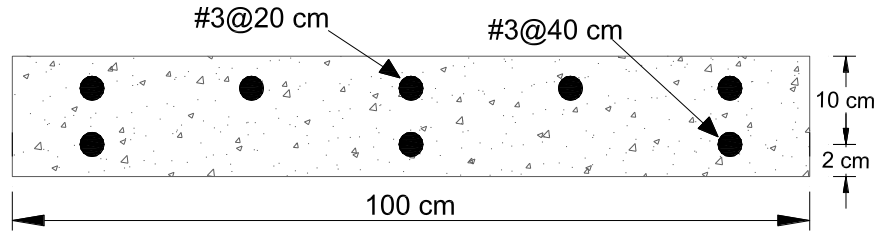


Figura 4.9 Sección transversal en el borde empotrado

Para el análisis de la ubicación del eje neutro se utiliza la Figura 4.5 de la sección 4.1.3, donde se muestra la sección transformada en el borde empotrado de la losa. De aquí se sustituyen las dimensiones correspondientes para la losa en estudio.

Para el cálculo de c se utiliza la ecuación (4.9), donde se reduce esta ecuación para la losa en estudio, con lo que se obtiene:

$$1250c - 7520 = 0 \quad (4.25)$$

Al despejar c de la ecuación anterior, se obtiene:

$$c = \frac{7520}{1250} = 6.02 \text{ cm} \quad (4.26)$$

De este resultado se observa que la profundidad del eje neutro está más cercana a la parte superior que es donde hay mayor cantidad de acero.

El momento de inercia de la sección transformada se calcula con la ecuación (4.12), con lo que se obtiene:

$$I = 15131.71 \text{ cm}^4 \quad (4.27)$$

4.3.3 Carga de inicio de agrietamiento

En esta sección se obtienen las cargas de inicio de agrietamiento de la losa maciza con un muro de 250 cm de longitud apoyado sobre ella, se utilizan los resultados obtenidos de las secciones 4.3.1 y 4.3.2 de este trabajo.

En la Tabla 4.3 se muestran los resultados obtenidos para la losa maciza con un muro de 250 cm de longitud apoyado sobre ella (L2.5m). En el modelo realizado en SAP2000 se aplicó una carga lineal al muro que está apoyado al centro de la losa, cuya magnitud fue de $q=17$ kg/cm.

Para el cálculo del esfuerzo σ_m se utilizó la ecuación (4.17), mientras que en el cálculo de la carga lineal de inicio de agrietamiento q_a se utilizó la ecuación (4.28). El cálculo de la resultante de la carga de inicio de agrietamiento al centro de la losa P_a se obtiene al multiplicar la ecuación (4.28) con la longitud de 250 cm del muro.

$$q_a = \frac{q\sigma_t}{\sigma_m} \quad (4.28)$$

Tabla 4.3 Cargas de inicio de agrietamiento en la losa maciza con un muro apoyado sobre ella

Tipo de losa	q (kg/cm)	m_m (kg-cm/cm)	Posición en la losa	c (cm)	I (cm ⁴)	σ_m (kg/cm ²)	q_a (kg/m)	P_a (kg)	Diferencia (%)
L2.5m	17	486.61	Centro	6.09	14,847.37	19.37	2,194	5,485	0.68
			Bordes	6.02	15,131.71	19.24	2,209	5,521	

4.3.4 Discusión

De la Tabla 4.3 se observa que la magnitud de la carga de inicio de agrietamiento es mayor en los bordes empotrados, con una diferencia de 15 kg/m (0.68%), este resultado indicaría que el agrietamiento iniciaría en el centro de la losa debido a que esta carga de inicio de agrietamiento es menor que la de los bordes.

4.4 Comparación de resultados

En esta sección se hace la comparación de la magnitud de la carga de inicio de agrietamiento para los tres sistemas de losas (maciza, encasetonada y maciza con muro apoyado sobre ella) obtenida con el criterio del esfuerzo principal máximo propuesto por Juárez-Luna (2014) descrito en la sección 2.2, el software SAP2000 y la metodología realizada en este capítulo.

4.4.1 Losa maciza

En la Tabla 4.4 se observa que la magnitud de la carga de inicio de agrietamiento de las losas macizas al considerar el acero de refuerzo embebido en el concreto es mayor que el obtenido sin considerar la presencia del acero de refuerzo. Mientras que los valores obtenidos con SAP2000 son similares a los obtenidos con este último método.

Tabla 4.4 Comparación de la carga de inicio de agrietamiento en losas macizas

Tipo de losa	Posición en la losa	Predicción con refuerzo	Predicción sin refuerzo	SAP
		w_a (kg/m ²)	w_a (kg/m ²)	w_a (kg/m ²)
LCSA	Centro	741	689	688
	Bordes	734		
LCE	Centro	712	661	660
	Bordes	718		
LRSA	Centro	1,317	1223	1223
	Bordes	1,304		
LRE	Centro	1,858	1726	1726
	Bordes	1,874		

4.4.2 Losa encasetonada

De la Tabla 4.5 se observa que la magnitud de la carga de inicio de agrietamiento para las losas encasetonadas al considerar el acero de refuerzo embebido en el concreto es el mismo que el obtenido sin considerar la presencia de este acero de refuerzo y del obtenido con SAP2000. Esto se debe a que el eje neutro y el eje geométrico coinciden, pues las barras de acero de la losa están colocadas exactamente al centro de la sección transversal.

Tabla 4.5 Comparación de la carga de inicio de agrietamiento en losas encasetonadas

Tipo de losa	Posición en la losa	Predicción con refuerzo		Predicción sin refuerzo		SAP	
		w_a (kg/m ²)	P_a (kg)	w_a (kg/m ²)	P_a (kg)	w_a (kg/m ²)	P_a (kg)
LE5X5	Centro	8,019	721.7	8,019	721.7	8,020	721.8
LE9X9	Centro	21,294	1,916.5	21,294	1,916.5	21,300	1,917

4.4.3 Losa maciza con muro apoyado sobre ella

En la Tabla 4.6 se observa que la magnitud de la carga de inicio de agrietamiento para la losa maciza con un muro apoyado sobre ella al considerar el acero de refuerzo embebido en el concreto es mayor que el obtenido sin considerar la presencia de este acero de refuerzo. Mientras que los valores obtenidos con SAP2000 son similares a los obtenidos con este último método.

Tabla 4.6 Comparación de la carga de inicio de agrietamiento en la losa maciza con un muro apoyado sobre ella

Tipo de losa	Posición en la losa	Predicción con refuerzo		Predicción sin refuerzo		SAP	
		q_a (kg/m)	P_a (kg)	q_a (kg/m)	P_a (kg)	q_a (kg/m)	P_a (kg)
L2.5m	Centro	2,194	5,485	2,096	5,240	2,128	5,320
	Bordes	2,209	5,521				

CAPÍTULO 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1 Conclusiones

En esta tesis se desarrollaron análisis lineales y no lineales para determinar la carga en la que ocurre el agrietamiento w_a , las trayectorias de propagación, las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de las losas, deformaciones en el acero de refuerzo, la magnitud de la carga última w_u , la cual se comparó con la obtenida con el método de las líneas de fluencia. Estos análisis se realizaron en los sistemas de losas descritos en los capítulos anteriores y sometidos a carga vertical.

Estas conclusiones se limitan solo a los casos aquí mostrados, pues para poder hacer conclusiones más generales se deben de realizar más modelos. Por ejemplo, para la losa maciza se podría variar las dimensiones en planta, el peralte, el esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo, aumentar o disminuir la separación del refuerzo, etc. Mientras que para la losa encasetonada se podría aumentar o disminuir el número de casetones, ancho de los nervios y espesor de la capa de compresión. Para la losa maciza con muro apoyado sobre ella se podría variar la longitud, ancho y posición del muro sobre la losa. Las variables anteriormente mencionadas podrían hacer que los resultados sean totalmente distintos.

Para que los resultados obtenidos en esta tesis se puedan extrapolar a losas más grandes, se deben cumplir con dos criterios:

- El modelo y la losa real deben ser geoméricamente similares.
- El modelo y la losa real deben tener las mismas condiciones de apoyo y que todas las cargas aplicadas tengan las mismas razones (proporciones) en los dos sistemas.

De las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de la losas de los modelos numéricos, se observa que la magnitud de w_u de una losa empotrada es considerablemente más grande que el de una losa simplemente apoyada.

En el caso de losas encasetonadas, se observa que al aumentar el número de nervaduras en ambas direcciones se incrementa la magnitud de la carga de inicio de agrietamiento w_a .

De los resultados obtenidos de la comparación de la magnitud de w_a obtenida con el criterio del esfuerzo principal máximo propuesto por Juárez-Luna (2014), el software SAP2000 y la metodología propuesta en esta tesis, se observa que las magnitudes son muy similares en el intervalo elástico, por lo que se recomienda usar un programa comercial como SAP2000, pues la exactitud de los resultados es muy similar que al obtenido con un método más detallado, además de que se requiere un costo computacional mucho menor.

5.2 Recomendaciones

- En el uso del método de líneas de fluencia se debe ser cuidadoso al elegir las posibles configuraciones de líneas de fluencia, para asegurarse que esta proporcione la carga de menor magnitud o el momento flexionante de mayor magnitud.
- Al realizar el dibujo del modelo en 3D en AUTOCAD se debe tener especial cuidado, pues se recomienda dibujar parte del mallado del modelo, donde se incluyan todos los puntos donde se podrían presentar discontinuidades, intersecciones de líneas, cargas concentradas, etcétera, así como evitar el trazo de líneas traslapadas. Además, se debe verificar minuciosamente que el dibujo de las líneas del armado de la losa coincidan correctamente con el dibujo del mallado realizado anteriormente.
- En el modelado numérico es necesario realizar un mallado más fino en las zonas con mayor concentración de esfuerzos o de deformaciones.
- Al realizar un análisis con elementos finitos a través de un software computacional especializado, se deben tener en cuenta las limitaciones y funcionamiento interno del programa, para asignar los elementos idóneos que modelen correctamente el comportamiento del material que se quiera estudiar.
- En modelos laboriosos, con geometrías o cargas complejas o con muchos grados de libertad se aconseja analizar una parte de este modelo, buscando siempre la simetría tanto en la geometría como en las cargas, con el fin de ahorrar tiempo computacional y mejorar la convergencia. En los bordes correspondientes a los ejes de simetría se deben restringir los grados de libertad perpendiculares a estos ejes.
- Los resultados obtenidos con ANSYS son muy precisos, pero estos análisis tienen la desventaja de ser muy laboriosos y con un costo computacional muy alto. Es por ello que para análisis elásticos es recomendable utilizar programas comerciales como SAP2000, ya que en este intervalo tienen muy buena aproximación en comparación con un programa de elementos finitos como ANSYS.

5.3 Trabajos futuros

A partir de las aportaciones de este trabajo, algunos trabajos futuros a realizar son:

- Realizar estos análisis numéricos de elementos de concreto reforzado para otros tipos de losas como son: losas doble T, a base de vigueta y bovedilla, losa acero, etc.

- Desarrollar estos análisis numéricos para losas de concreto reforzado con geometrías irregulares.
- Estudiar losas de concreto reforzado no solo a nivel de elemento, sino que también a nivel de estructura. Es decir estudiar estas losas tomando en cuenta la interacción que tienen con la estructura donde son colocadas.
- Desarrollar análisis numéricos de losas con muros apoyados sobre su claro, incluyendo los efectos dinámicos.

ANEXO A: Método de las líneas de fluencia en losas macizas

En esta sección se determina el valor de la carga última w_u obtenida con el método de las líneas de fluencia. Estos análisis se realizan para la geometría de dos losas: cuadrada y rectangular, a las cuales se les asignan dos condiciones de apoyo: simplemente apoyada y empotrada. Las dimensiones y las propiedades mecánicas de los materiales utilizados para estas losas se describen en la sección 3.1.

A.1 Losa cuadrada simplemente apoyada

Esta losa cuadrada tiene dimensiones de 400 cm por lado, la cual está simplemente apoyada en todos sus bordes, el acero de refuerzo y las propiedades de los materiales utilizados se describen en la sección 3.1. En la Figura A.1 se muestra la vista en planta de esta losa.

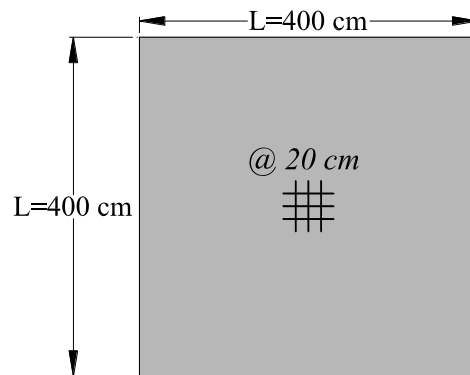


Figura A.1. Vista en planta de la losa cuadrada simplemente apoyada

La configuración de las líneas de fluencia propuestas para esta losa son en forma de cruz, como se muestra en la Figura A.2, cabe mencionar que esta configuración es típica para una losa cuadrada, apoyada sobre todos sus bordes y con carga uniformemente distribuida sobre toda su superficie.

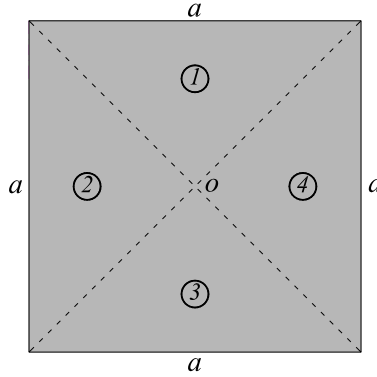


Figura A.2. Configuración de las líneas de fluencia propuestas para la losa cuadrada simplemente apoyada

El cálculo del momento resistente último al centro de la losa se realiza con la ecuación (2.1). De esta ecuación se obtiene una magnitud de:

$$M_u = 1030.89 \text{ kg} \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \quad (\text{A.1})$$

Para el cálculo de la carga última w_u se utilizan dos métodos distintos; el método del trabajo virtual y el método de equilibrio de segmentos. Esto se hace con el fin de comparar los resultados obtenidos con ambos métodos.

A.1.1 Método de equilibrio de secciones

Se realiza el equilibrio de momentos con respecto al eje de rotación de cualquiera de los cuatro segmentos de losa de la Figura A.2, como se muestra en la Figura A.3.

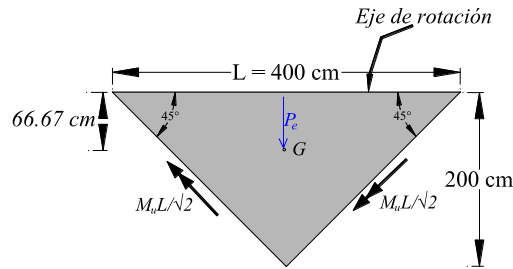


Figura A.3 Equilibrio de momentos de uno de los segmentos de la losa cuadrada simplemente apoyada.

La carga resultante que actúa en cualquier segmento de losa se obtiene al multiplicar el área de dicho segmento con la carga uniformemente distribuida que actúa sobre la losa, como se muestra en la ecuación (A.2).

$$P_e = \left(\frac{L \left(\frac{L}{2} \right)}{2} \right) w_u = \left(\frac{400(200)}{2} \right) w_u \quad (\text{A.2})$$

Al reducir la ecuación (A.2), se obtiene:

$$P_e = 40000w_u \quad (\text{A.3})$$

Posteriormente se realiza una suma de momentos con respecto al eje de rotación del segmento de losa. Se utiliza la ecuación (2.2), es decir:

$$\sum M_{eje} = (40000w_u) \frac{1}{3} (200) - 2 \left(\frac{1030.89(400)}{\sqrt{2}} \cos 45^\circ \right) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Reduciendo la ecuación (A.4) y despejando el valor de w_u , se obtiene:

$$w_u = 0.154612 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 1546.12 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \quad (\text{A.5})$$

A.1.2 Método del trabajo virtual

En este método se iguala el trabajo interno con el externo para encontrar la relación entre las cargas aplicadas y los momentos últimos resistentes de la losa.

A.1.2.1 Trabajo externo realizado por las cargas

En el cálculo del trabajo externo se toma en cuenta la aportación de las cuatro porciones de la losa que se forman de la configuración de las líneas de fluencia propuesta en la Figura A.2. De esta configuración se toma como referencia la horizontal sobre $a-o$ y posteriormente se aplica un desplazamiento virtual unitario al centro de la losa. El trabajo externo se calcula como la sumatoria del producto de la carga total por el desplazamiento del punto de aplicación de su resultante de cada porción de la losa, como se muestra en la Figura A.4.

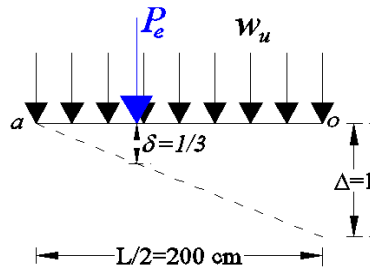


Figura A.4. Configuración deformada de una porción de la losa cuadrada simplemente apoyada, de la cual se calcula el trabajo externo

La resultante de cada porción de la losa se obtiene también con la ecuación (A.3). Para el cálculo del trabajo externo se utiliza la ecuación (2.6), es decir:

$$W_e = 4 \left(40000 w_u \left(\frac{1}{3} \right) \right) \quad (A.6)$$

Reduciendo la ecuación (A.6), se obtiene:

$$W_e = \frac{160000}{3} w_u \quad (A.7)$$

A.1.2.2 Trabajo interno realizado por los momentos resistentes

En el cálculo del trabajo interno también se utilizan las cuatro porciones de la losa que se forman de la configuración de las líneas de fluencia propuesta en la Figura A.2. El trabajo interno se calcula como la suma de los productos de los momentos de fluencia por unidad de longitud de rotula, por las rotaciones plásticas θ_i en las respectivas líneas de fluencia, consistentes con el desplazamiento virtual, como se muestra en la Figura A.5.

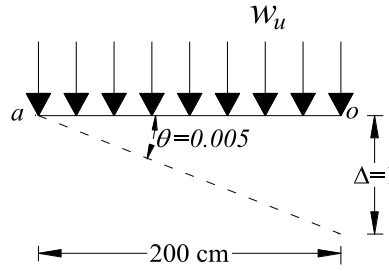


Figura A.5. Configuración deformada de una porción de la losa cuadrada simplemente apoyada, de la cual se calcula el trabajo interno

El trabajo interno en la losa se obtiene al resolver la ecuación (2.9), es decir:

$$W_i = 4 \left[1030.89 (400) \left(\frac{2}{400} \right) \right] \quad (A.8)$$

Al educir la ecuación (A.8), se obtiene:

$$W_i = 8247.12 \text{ kg} - \text{cm} \quad (A.9)$$

El valor de w_u se obtiene al igualar las ecuaciones (A.7) y (A.9), tal que:

$$\frac{160000}{3} w_u = 8247.12 \text{ kg} - \text{cm} \quad (A.10)$$

Reduciendo la ecuación (A.10) y despejando w_u , se tiene:

$$w_u = 0.154633 \frac{kg}{cm^2} = 1546.33 \frac{kg}{m^2} \quad (A.11)$$

A.2 Losa cuadrada empotrada

Esta losa cuadrada tiene las mismas dimensiones, el mismo acero de refuerzo y las mismas propiedades de los materiales utilizados que la losa anterior, con la diferencia que esta losa está empotrada a lo largo de todos sus bordes. En la Figura A.6 se muestra la vista en planta de esta losa.

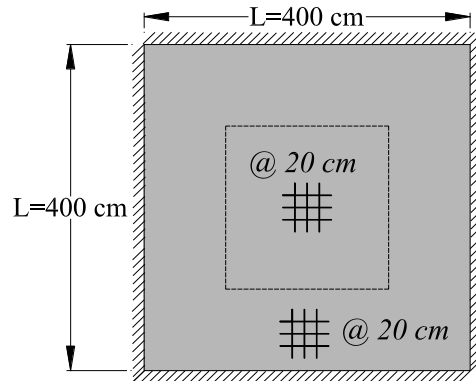


Figura A.6. Vista en planta de la losa cuadrada empotrada.

La configuración de las líneas de fluencia propuestas para esta losa es la misma que para la losa anterior, como se muestra en la Figura A.7.

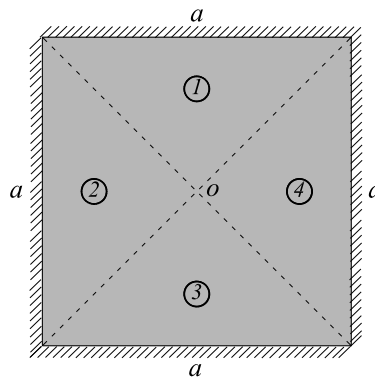


Figura A.7. Configuración de las líneas de fluencia propuestas para la losa cuadrada empotrada

El cálculo del momento resistente último al centro y en el borde de la losa se realiza con la ecuación (2.1), con la diferencia que en el momento resistente último en el borde empotrado de la losa se utiliza el área de acero negativo A'_s en dicha ecuación. De las que se obtienen las magnitudes siguientes:

$$M_u = 1030.89 \text{ kg} \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \quad (\text{A.12})$$

$$M'_u = 1030.89 \text{ kg} \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \quad (\text{A.13})$$

De las ecuaciones (A.12) y (A.13) se observa que el momento resistente último positivo y negativo de la losa son similares, pues la losa tiene el mismo diámetro del acero de refuerzo, la misma separación del armado para ambas direcciones y para ambos lechos.

Para el cálculo de w_u se utilizan dos métodos distintos; el método del trabajo virtual y el método de equilibrio de segmentos. Esto se hace con el fin de comparar los resultados obtenidos con ambos métodos.

A.2.1 Método de equilibrio de secciones

Se realiza el equilibrio de momentos con respecto al eje de rotación de cualquiera de los cuatro segmentos de la losa de la Figura A.7, como se muestra en la Figura A.8.

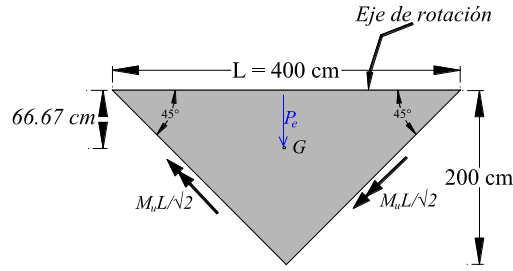


Figura A.8. Equilibrio de momentos de uno de los segmentos de la losa cuadrada empotrada

La carga resultante que actúa en cualquier segmento de losa se obtiene al multiplicar el área de dicho segmento con la carga uniformemente distribuida que actúa sobre la losa. La magnitud obtenida es la misma que la presentada en la ecuación (A.3).

En la suma de momentos con respecto al eje de rotación del segmento de losa se utiliza la ecuación (2.2) pero incluyendo el momento negativo de la losa, es decir:

$$\sum M_{eje} = (40000w_u) \frac{1}{3} (200) - 2 \left(\frac{1030.89(400)}{\sqrt{2}} \cos 45^\circ + \frac{1030.89(400)}{\sqrt{2}} \cos 45^\circ \right) = 0 \quad (\text{A.14})$$

Reduciendo la ecuación (A.14) y despejando el valor de w_u , se obtiene:

$$w_u = 0.309267 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 3092.67 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \quad (\text{A.15})$$

A.2.2 Método del trabajo virtual

A.2.2.1 Trabajo externo realizado por las cargas

En el cálculo del trabajo externo se utiliza la Figura A.4. La resultante de cada porción de la losa se obtiene también con la ecuación (A.3). El trabajo externo sobre la losa se obtiene con la ecuación (A.7). Este trabajo externo es el mismo que en la losa anterior, pues ambas losas tienen las mismas dimensiones y están cargadas uniformemente.

A.2.2.2 Trabajo interno realizado por los momentos resistentes

Para el cálculo del trabajo interno se utiliza la Figura A.5. El trabajo interno en la losa se obtiene al resolver la ecuación (2.9) y considerando el momento negativo resistente de la losa, es decir:

$$W_i = 4 \left((400) \left(\frac{2}{400} \right) \right) (1030.89 + 1030.89) \quad (\text{A.16})$$

Al reducir la ecuación (A.16), se obtiene:

$$W_i = 16494.24 \text{ kg} - \text{cm} \quad (\text{A.17})$$

El valor de w_u se obtiene al igualar las ecuaciones (A.7) y (A.17), tal que:

$$\frac{160000}{3} w_u = 16494.24 \text{ kg} - \text{cm} \quad (\text{A.18})$$

Reduciendo la ecuación (A.18) y despejando w_u , se tiene:

$$w_u = 0.309267 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 3092.67 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \quad (\text{A.19})$$

A.3 Losa rectangular simplemente apoyada

Esta losa rectangular tiene dimensiones de 400 x 200 cm, la cual está simplemente apoyada en todos sus bordes, el acero de refuerzo y las propiedades de los materiales utilizados se describen en la sección 3.1. En la Figura A.9 se muestra la vista en planta de esta losa.

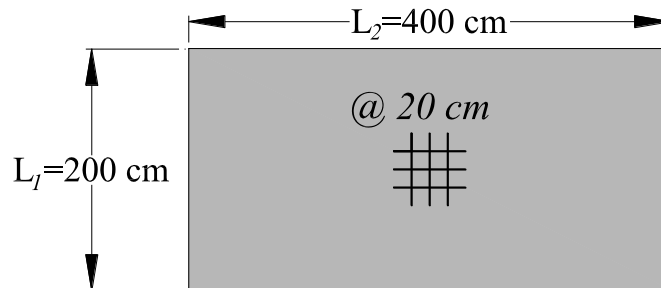


Figura A.9. Vista en planta de la losa rectangular simplemente apoyada

La configuración de las líneas de fluencia propuestas para esta losa son dos trapecios y dos triángulos, como se muestra Figura A.10, cabe mencionar que esta configuración es típica para una losa rectangular, apoyada sobre todos sus bordes y con carga uniformemente distribuida sobre toda su superficie.

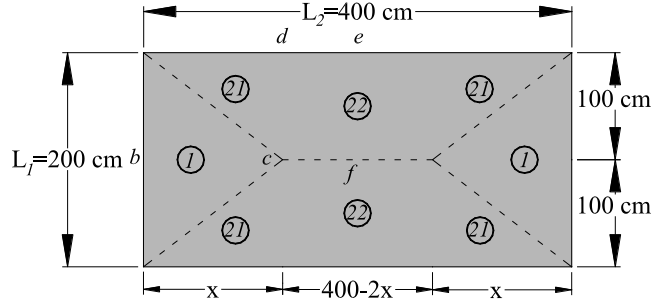


Figura A.10. Configuración de las líneas de fluencia propuestas para la losa rectangular simplemente apoyada

El cálculo del momento resistente último al centro de la losa se realiza con la ecuación (2.1). De esta ecuación se obtiene una magnitud de:

$$M_u = 1030.89 \text{ kg} \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \quad (\text{A.20})$$

Para el cálculo de w_u se utilizan dos métodos distintos; el método del trabajo virtual y el método de equilibrio de segmentos. Esto se hace con el fin de comparar los resultados obtenidos con ambos métodos.

A.3.1 Método de equilibrio de secciones

En la Figura A.11 se enumeran los dos segmentos diferentes de la losa.

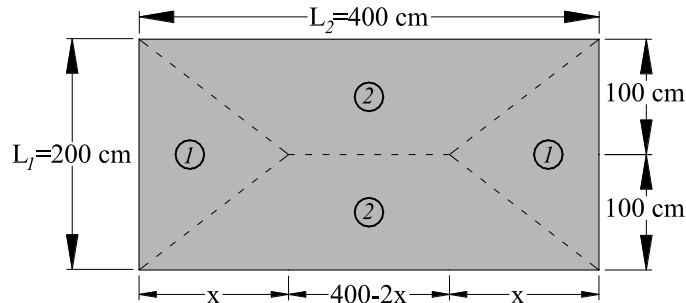


Figura A.11. Segmentos de la losa rectangular simplemente apoyada

Se realiza el equilibrio de momentos con respecto al eje de rotación del segmento 1, como se observa en la Figura A.12.

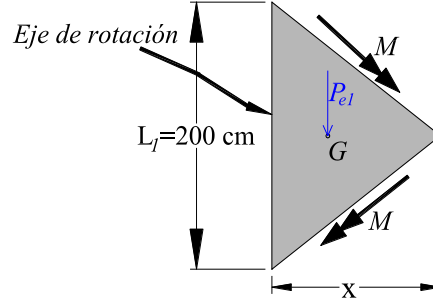


Figura A.12. Equilibrio de momentos del segmento 1 de la losa rectangular

La carga resultante que actúa en el segmento 1 de losa se obtiene al multiplicar el área de dicho segmento con la carga uniformemente distribuida que actúa sobre la losa, como se muestra en la ecuación (A.21).

$$P_{e1} = \frac{L_1 x}{2} w_u = \frac{200x}{2} w_u \quad (A.21)$$

Al reducir la ecuación (A.21), se obtiene:

$$P_{e1} = 100w_u x \quad (A.22)$$

La suma de momentos con respecto al eje de rotación del segmento 1 de la losa se realiza con la ecuación (A.23).

$$\sum M_{eje} = 100w_u x \left(\frac{x}{3} \right) - M_u L_1 = 0 \quad (A.23)$$

Sustituyendo los valores correspondientes, reduciendo dicha ecuación y despejando el valor de w_u , se obtiene:

$$\sum M_{eje} = \frac{100}{3} w_u x^2 - 1030.89(200) = 0 \quad (A.24)$$

$$w_u = \frac{6185.34}{x^2} \quad (A.25)$$

De la ecuación (A.25), se observa que la magnitud de w_u está en función de la variable desconocida x . Para encontrar los valores de w_u y x , es necesario calcular el equilibrio de momentos con respecto al eje de rotación del segmento 2 de la losa e igualar ambas ecuaciones.

Para realizar el equilibrio de momentos del segmento 2 con respecto a su eje de rotación, se divide en dos porciones imaginarias (porción 21 y 22), esto para tener figuras conocidas y simplificar los cálculos, como se muestra en la Figura A.13.

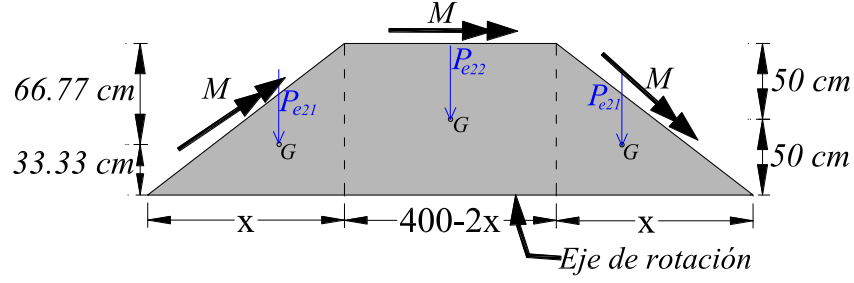


Figura A.13. Equilibrio de momentos del segundo segmento de la losa rectangular

La carga resultante que actúa en el segmento 2 se divide en dos cargas resultantes: P_{e21} y P_{e22} , como se muestran en las ecuaciones (A.27) y (A.29), respectivamente.

$$P_{e21} = \left(\frac{L_1}{2} \right) x w_u = \left(\frac{200}{2} \right) x w_u \quad (A.26)$$

Al reducir la ecuación (A.26), se obtiene:

$$P_{e21} = 50w_u x \quad (A.27)$$

$$P_{e22} = (400 - 2x) \frac{L_1}{2} w_u = (400 - 2x) \frac{200}{2} w_u \quad (A.28)$$

Al reducir la ecuación (A.28), se obtiene:

$$P_{e22} = -200w_u x + 40000w_u \quad (A.29)$$

La suma de momentos con respecto al eje de rotación del segmento 2 se realiza con la ecuación (A.30), es decir:

$$\sum M_{eje} = 2 \left[(50w_u x) \left(\frac{L_1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \right] + \left[(-200w_u x + 40000w_u) \left(\frac{L_1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \right] - M_u L_2 = 0 \quad (A.30)$$

Sustituyendo los valores correspondientes y reduciendo dicha ecuación, se obtiene:

$$-\frac{20000}{3} w_u x + 2000000w_u - 412356 = 0 \quad (A.31)$$

Al sustituir la ecuación (A.25) en la ecuación (A.31) y al despejar el valor de x , se obtiene un valor aproximado de:

$$x = 130cm \quad (A.32)$$

La magnitud de w_u se obtiene al sustituir la ecuación (A.32) en la ecuación (A.25), es decir:

$$w_u = 0.365996 \frac{kg}{cm^2} = 3659.96 \frac{kg}{m^2} \quad (A.33)$$

A.3.2 Método del trabajo virtual

A.3.2.1 Trabajo externo realizado por las cargas

De la Figura A.10 se observa que a las porciones 1, 2I y 22 de la losa rectangular se les asocian los ejes de referencia sobre $b-c$, $d-c$ y $e-f$, respectivamente. Se impone un desplazamiento virtual unitario al centro de la losa, el trabajo externo se calcula como la suma de los productos de las cargas resultantes de cada porción de losa por el desplazamiento del punto de aplicación de cada resultante, como se muestra en la Figura A.14.

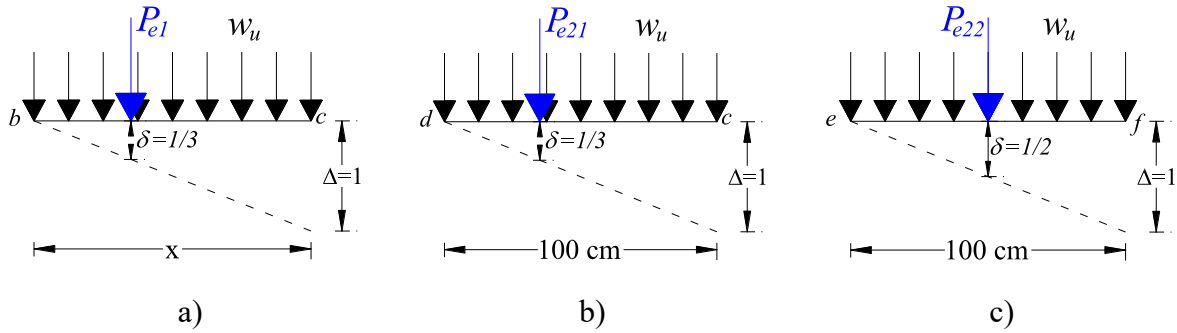


Figura A.14. Configuraciones deformadas de las tres porciones de la losa rectangular, de las cuales se calcula el trabajo externo: a) porción 1, b) porción 2I y c) porción 22

Las magnitudes de las cargas resultantes de las porciones 1, 2I y 22 se obtienen con las ecuaciones (A.22), (A.27) y (A.29), respectivamente.

El trabajo externo se calcula con la ecuación (A.34):

$$W_e = 2 \left[(100w_u x) \frac{1}{3} \right] + 4 \left[(50w_u x) \frac{1}{3} \right] + 2 \left[(-200w_u x + 40000w_u) \frac{1}{2} \right] \quad (A.34)$$

Al reducir la ecuación (A.34), se obtiene:

$$W_e = \left(-\frac{200}{3}x + 40000 \right) w_u \quad (A.35)$$

A.3.2.2 Trabajo interno realizado por los momentos resistentes

En el cálculo del trabajo interno se utilizan las configuraciones de las líneas de fluencia propuesta en la Figura A.11. De estos segmentos se calculan las rotaciones plásticas θ_1 y θ_2 que son consistentes con el desplazamiento virtual, como se observa en la Figura A.15.

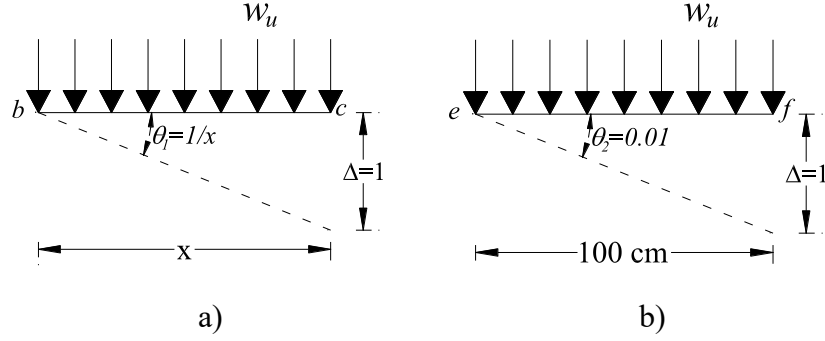


Figura A.15. Configuraciones deformadas de los dos segmentos de la losa rectangular, de las cuales se calcula el trabajo interno: a) segmento 1 y b) segmento 2

El trabajo interno en la losa se obtiene resolviendo la ecuación (A.36), es decir:

$$W_i = 2(M_u L_1 \theta_1) + 2(M_u L_2 \theta_2) \quad (\text{A.36})$$

$$W_i = 2 \left[1030.89(200) \left(\frac{1}{x} \right) \right] + 2 \left[1030.89(400)(0.01) \right] \quad (\text{A.37})$$

Al reducir la ecuación (A.37), se obtiene:

$$W_i = \frac{412356 + 8247.12x}{x} \quad (\text{A.38})$$

Para obtener la magnitud de w_u se igualan las ecuaciones (A.35) y (A.38), y se despeja este valor, es decir:

$$w_u = \frac{\frac{412356 + 8247.12x}{x}}{-\frac{200}{3}x + 40000} \quad (\text{A.39})$$

De la ecuación (A.39), se observa que la magnitud de w_u está en función de la variable desconocida x . Para encontrar los valores de w_u y x , se procede de dos maneras diferentes. La primera consistiría en derivar ecuación (A.39) con respecto a x y, posteriormente, igualarla a cero y así encontrar un valor para x . Una vez hecho esto se sustituiría en la ecuación (A.39) para obtener el valor de w_u . Sin embargo, en este trabajo se optó por resolver la ecuación (A.39) por tanteos, es decir, se proponen valores para x y se calculan los valores de w_u de tal manera que se obtenga el menor valor para w_u .

Se inicia el tanteo con un valor propuesto de $x=100$ cm.

Tabla A.1 Tanteos para diversos valores de x y w_u para la losa rectangular simplemente apoyada

x (cm)	w_u (kg/cm ²)
100	0.37112
110	0.367219
120	0.365107
130	0.364439
140	0.364973
150	0.366539

De la Tabla A.1 se observa que el menor valor w_u se obtiene al proponer un valor de $x=130$ cm. La magnitud de w_u obtenida es:

$$w_u = 0.364439 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 3644.39 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \quad (\text{A.40})$$

A.4 Losa rectangular empotrada

Esta losa rectangular tiene las mismas dimensiones, como se muestra en la Figura A.16, el acero de refuerzo y las propiedades de los materiales utilizados son las mismas que para la losa anterior, con la diferencia que esta losa está empotrada a lo largo de todos sus bordes.

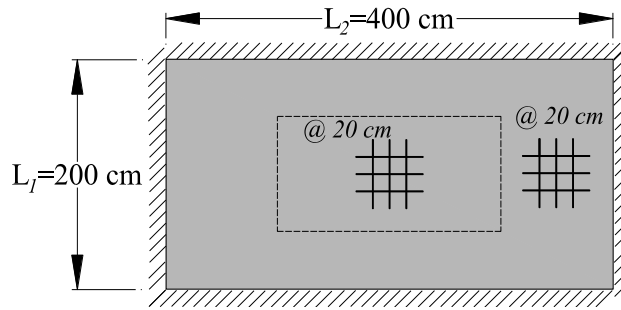


Figura A.16. Vista en planta de la losa rectangular empotrada

La configuración de las líneas de fluencia propuestas se muestra en la Figura A.17, que es la misma que para la losa anterior.

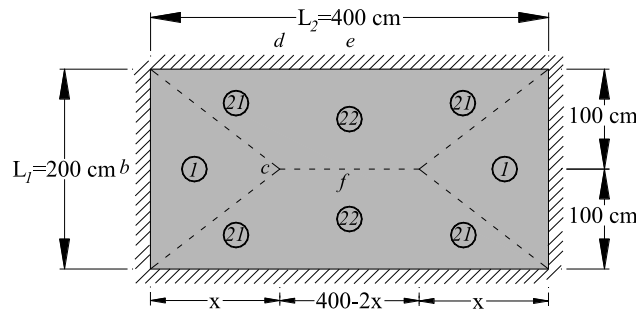


Figura A.17. Configuración de las líneas de fluencia para la losa rectangular empotrada

El cálculo del momento resistente último al centro y en el borde de la losa se realiza con la ecuación (2.1), con la diferencia que en el momento resistente último en el borde empotrado de la losa se utiliza el área de acero negativo A'_s en dicha ecuación. Las magnitudes de los momentos resistentes tanto positivo como negativo se muestran en las ecuaciones (A.12) y (A.13), respectivamente.

A.4.1 Método de equilibrio de secciones

En la Figura A.18 se enumeran los dos segmentos diferentes de la losa.

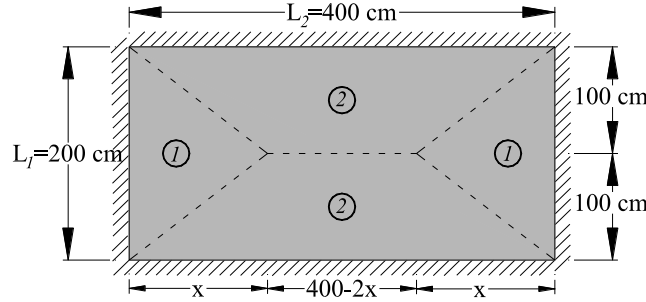


Figura A.18. Segmentos de la losa rectangular empotrada

Se realiza el equilibrio de momentos con respecto al eje de rotación del segmento 1, como se observa en la Figura A.12.

La carga resultante que actúa en el segmento 1 se obtiene al multiplicar el área de dicho segmento con la carga uniformemente distribuida que actúa sobre la losa, como se muestra en la ecuación (A.22).

La suma de momentos con respecto al eje de rotación del segmento 1 se realiza con la ecuación (A.41), es decir:

$$\sum M_{eje} = 100w_u x \left(\frac{x}{3} \right) - (M_u + M'_u) L_1 = 0 \quad (A.41)$$

Sustituyendo los valores correspondientes, reduciendo dicha ecuación y despejando el valor de w_u , se obtiene:

$$\sum M_{eje} = \frac{100}{3} w_u x^2 - 2061.78(200) = 0 \quad (A.42)$$

$$w_u = \frac{12370.68}{x^2} \quad (A.43)$$

De la ecuación (A.43), se observa que la magnitud de w_u está en función de la variable desconocida x . Para encontrar los valores de w_u y x , es necesario calcular el equilibrio de momentos con respecto al eje de rotación del segmento 2 e igualar ambas ecuaciones.

Para realizar el equilibrio de momentos del segmento 2 con respecto a su eje de rotación, se divide en dos porciones imaginarias (porción 21 y 22), esto para tener figuras conocidas y simplificar los cálculos, como se muestra en la Figura A.13.

Las cargas resultantes P_{e21} y P_{e22} se obtienen con las ecuaciones (A.27) y (A.29), respectivamente.

La suma de momentos con respecto al eje de rotación del segmento 2 se calcula con la ecuación (A.44), es decir:

$$\sum M_{eje} = 2 \left[(50w_u x) \left(\frac{L_1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \right] + \left[(-200w_u x + 40000w_u) \left(\frac{L_1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \right] - (M_u + M'_u) L_2 = 0 \quad (A.44)$$

Sustituyendo los valores correspondientes y reduciendo dicha ecuación, se obtiene:

$$-\frac{20000}{3} w_u x + 2000000 w_u - 824712 = 0 \quad (A.45)$$

Al sustituir la ecuación (A.43) en la ecuación (A.45) y al despejar el valor de x , se obtiene un valor aproximado de:

$$x = 130cm \quad (A.46)$$

La magnitud de w_u se obtiene al sustituir la ecuación (A.46) en la ecuación (A.43), es decir:

$$w_u = 0.728626 \frac{kg}{cm^2} = 7286.26 \frac{kg}{m^2} \quad (A.47)$$

A.4.2 Método del trabajo virtual

A.4.2.1 Trabajo externo realizado por las cargas

De la Figura A.17 se observa que a las porciones 1, 21 y 22 de la losa rectangular se les asocian los ejes de referencia sobre $b-c$, $d-c$ y $e-f$, respectivamente. Se impone un desplazamiento virtual unitario al centro de la losa, el trabajo externo se calcula como la suma de los productos de las cargas resultantes de cada porción de losa por el desplazamiento del punto de aplicación de cada resultante, como se muestra en la Figura A.14.

Las magnitudes de las cargas resultantes de las porciones 1, 21 y 22 se obtienen con las ecuaciones (A.22), (A.27) y (A.29), respectivamente. El trabajo externo al igual que en la losa rectangular simplemente apoyada se calcula con la ecuación (A.35).

A.4.2.2 Trabajo interno realizado por los momentos resistentes

En el cálculo del trabajo interno se utilizan las configuraciones de las líneas de fluencia propuesta en la Figura A.18. De estos segmentos se calculan las rotaciones plásticas θ_1 y θ_2 que son consistentes con el desplazamiento virtual, como se observa en la Figura A.15.

El trabajo interno en la losa se obtiene resolviendo la ecuación (A.36), es decir:

$$W_i = 2L_1\theta_1(M_u + M'_u) + 2L_2\theta_2(M_u + M'_u) \quad (A.48)$$

$$W_i = \left[2(200)\left(\frac{1}{x}\right) \right] (1030.89 + 1030.89) + \left[2(400)(0.01) \right] (1030.89 + 1030.89) \quad (A.49)$$

Al reducir la ecuación (A.49), se obtiene:

$$W_i = \frac{824712 + 16494.24x}{x} \quad (A.50)$$

Para obtener la magnitud de w_u se igualan las ecuaciones (A.35) y (A.50), y se despeja este valor, es decir:

$$w_u = \frac{\frac{824712 + 16494.24x}{x}}{-\frac{200}{3}x + 40000} \quad (A.51)$$

Se calcula la magnitud de w_u al resolver la ecuación (A.51) por tanteos, es decir, se proponen valores para x y se calculan los valores de w_u de tal manera que se obtenga el menor valor para w_u . Se comienza el tanteo con un valor propuesto de $x=110$ cm y se tabulan los resultados.

Tabla A.2 Tanteos para diversos valores de x y w_u para la losa rectangular empotrada

x (cm)	W_u (kgf/cm ²)
110	0.734437
120	0.730214
130	0.728878
140	0.729947

De la Tabla A.2 se observa que el valor menor para w_u se obtiene al proponer un valor de $x=130$ cm. La magnitud calculada de w_u es:

$$w_u = 0.728878 \frac{kg}{cm^2} = 7288.78 \frac{kg}{m^2} \quad (A.52)$$

ANEXO B: Método de las líneas de fluencia en la losa maciza con un muro apoyado sobre ella

En esta sección se determina el valor de la carga última P_u obtenida con el método de las líneas de fluencia. Estos análisis se realizan para una losa cuadrada que tiene dimensiones de 375 cm por lado, esta empotrada en todos sus bordes y con un muro de longitud de 250 cm apoyado sobre ella. El acero de refuerzo, las dimensiones y las propiedades mecánicas de los materiales utilizados para esta losa se describen en la sección 3.3. En la Figura B.1 se muestra la vista en planta de está losa.

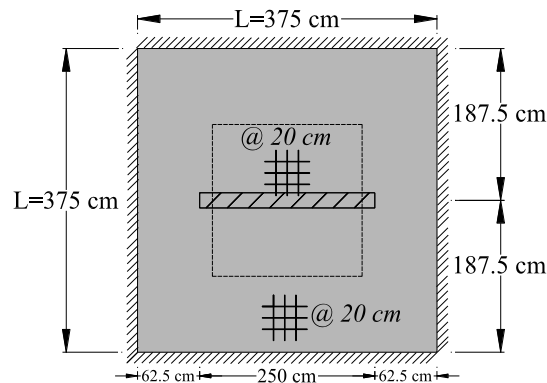


Figura B.1 Vista en planta de la losa maciza con un muro apoyado sobre ella

La configuración de las líneas de fluencia propuestas para esta losa son dos trapecios y dos triángulos, cabe mencionar que esta configuración es parecida a la obtenida con las trayectorias de agrietamiento calculada con ANSYS. En la Figura B.2 se muestra la configuración de estas líneas de fluencia propuestas.

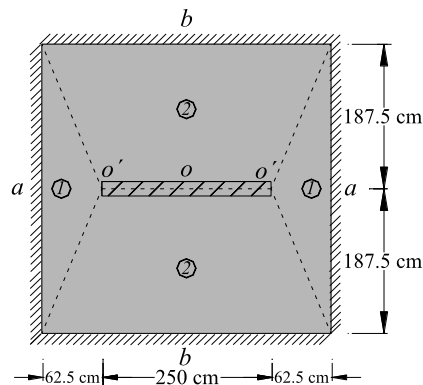


Figura B.2 Configuración de las líneas de fluencia propuestas para la losa maciza con muro apoyado sobre ella

El cálculo del momento resistente último al centro y en el borde de la losa se realiza con la ecuación (2.1), con la diferencia que en el momento resistente último en el borde empotrado de la losa se utiliza el área de acero negativo A'_s en dicha ecuación. De las que se obtienen las magnitudes siguientes:

$$M_u = 1299.24 \text{ kg} \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \quad (\text{B.1})$$

$$M'_u = 1299.24 \text{ kg} \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \quad (\text{B.2})$$

De las ecuaciones (B.1) y (B.2) se observa que el momento resistente último positivo y negativo de la losa son similares, pues la losa tiene el mismo diámetro del acero de refuerzo, la misma separación del armado para ambas direcciones y para ambos lechos. Para el cálculo de P_u se utiliza el método del trabajo virtual.

B.1.1 Método del trabajo virtual

En este método se iguala el trabajo interno con el externo para encontrar la relación entre las cargas aplicadas y los momentos últimos resistentes de la losa.

B.1.1.1 Trabajo externo realizado por las cargas

De la Figura B.2 se observa que a las porciones 1 y 2 de la losa se les asocian los ejes de referencia sobre $a-o'$ y $b-o$, respectivamente. Se impone un desplazamiento virtual unitario al centro de la losa, el trabajo externo se calcula como la suma de los productos de las cargas resultantes de cada porción de losa por el desplazamiento del punto de aplicación de cada resultante, como se muestra en la Figura B.3.

Para determinar el valor de las resultantes que actúan sobre cada porción de la losa, se extrajo del modelo elástico realizado en SAP2000 las reacciones que se producían en los bordes de esta losa, obteniéndose las cargas siguientes:

$$P_{e1} = 0.38P_u \quad (\text{B.3})$$

$$P_{e2} = 0.12P_u \quad (\text{B.4})$$

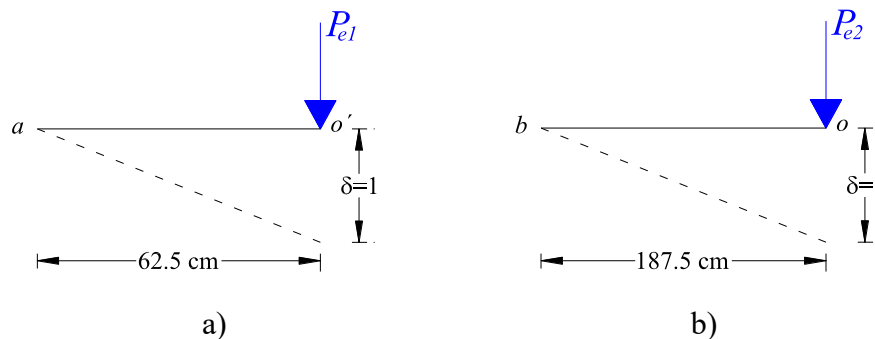


Figura B.3 Configuraciones deformadas de las dos porciones de la losa maciza con un muro apoyado sobre ella, de las cuales se calcula el trabajo externo: a) porción 1 y b) porción 2

Para el cálculo del trabajo externo se utiliza la ecuación (B.5) es decir:

$$W_e = 2[(0.38P_u)(1)] + 2[(0.12P_u)(1)] \quad (B.5)$$

Reduciendo la ecuación (B.5), se obtiene:

$$W_e = P_u = 250q_u \quad (B.6)$$

B.1.1.2 Trabajo interno realizado por los momentos resistentes

En el cálculo del trabajo interno se utilizan las configuraciones de las líneas de fluencia propuestas en la Figura B.2. De estos segmentos se calculan las rotaciones plásticas θ_1 y θ_2 que son consistentes con el desplazamiento virtual. El trabajo interno se calcula como la suma de los productos de los momentos de fluencia por unidad de longitud de rotula, por las rotaciones plásticas θ_i en las respectivas líneas de fluencia, consistentes con el desplazamiento virtual, como se muestra en la Figura B.4.

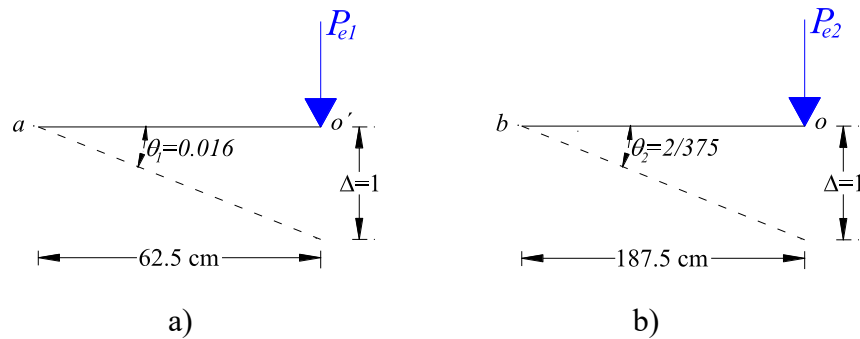


Figura B.4 Configuraciones deformadas de las dos porciones de la losa maciza con un muro apoyado sobre ella, de las cuales se calcula el trabajo interno: a) porción 1 y b) porción 2

El trabajo interno en la losa se obtiene resolviendo la ecuación (B.7), es decir:

$$W_i = 2[L\theta_1(M_u + M'_u) + L\theta_2(M_u + M'_u)] \quad (B.7)$$

$$W_i = 2L(M_u + M'_u)(\theta_1 + \theta_2) \quad (B.8)$$

$$W_i = 2(375)(1299.24 + 1299.24)\left(\frac{2}{125} + \frac{2}{375}\right) \quad (B.9)$$

Al reducir la ecuación (B.9), se obtiene:

$$W_i = 41575.68 \text{ kg} - \text{cm} \quad (B.10)$$

Para obtener la magnitud de la carga lineal última q_u se igualan las ecuaciones (B.6) y (B.10), y se despeja este valor, es decir:

$$q_u = \frac{41575.68}{250} \quad (B.11)$$

Al reducir la ecuación (B.11), se obtiene:

$$q_u = 166.3027 \frac{kg}{cm} = 16630.27 \frac{kg}{m} \quad (B.12)$$

El cálculo de P_u se obtiene al multiplicar la ecuación (B.12) con la longitud del muro, es decir:

$$P_u = q_u L \quad (B.13)$$

Al reducir la ecuación (B.13), se tiene:

$$P_u = 41575.68 kg \quad (B.14)$$

Referencias

- [1] Akinyele J. O. (2011). “Comparism of computer based yield line theory with elastic theory and finite element methods for solid slabs”, International Journal of Engineering and Technology, 3(1), 1 – 5.
- [2] ANSYS (2013), ANSYS 15.0, Ansys Inc., Estados Unidos.
- [3] AUTODESK (2014), AUTOCAD 2014, Autodesk Inc., Estados Unidos.
- [4] Bauer D. y Redwood R. G. (1987). “Numerical yield line analysis”, Computers & Structures, 26(4), 587 – 596.
- [5] CIMNE (2014), GID 11.1.8d, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, España.
- [6] CSI (2013), SAP2000 v.16.0, Computers and Structures Inc., Berkeley, CA, Estados Unidos de America.
- [7] Gómez-Bernal A, Manzanares-Ponce D, Vargas-Arguello O, Arellano-Méndez E, Juárez-García H y González-Cuevas O. (2015). “Estudio experimental y numérico de un prototipo losa-muro de transferencia”, Concreto y Cemento. Investigación y Desarrollo, 6(2), 30 – 47.
- [8] Gonzales Cuevas O. M., Robles F. (2005). Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado, Limusa, 4ta edición.
- [9] Hashim M. S. y Mohammad H. (2000). “Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs”, Journal of Structural Engineering, 126(2), 219 – 227.
- [10] Johansen. K. W. (1962). “Yield line theory”, Cement and Concrete Association.
- [11] Johnson D. (2001). “On the safety of the strip method for reinforced concrete slab design”, Computers & Structures, 79, 2425 – 2430.
- [12] Juárez-Luna G. (2015). “Apuntes del Curso: Taller de Análisis Estructural III”, Departamento de Materiales, UAM-Azcapotzalco.
- [13] Juárez-Luna G. (2014). “Determinación de la carga de agrietamiento en losas de concreto reforzado”, Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras, 19(1), 91 – 111.

-
- [14] Juárez-Luna G. y Ayala G. (2014). “Failure of RC slabs modelled using an embedded discontinuity approach”, 11th World Congress on Computational Mechanics, 1 – 13.
- [15] Juárez-Luna G. y Caballero-Garatachea O. (2014). “Coeficientes de diseño y trayectorias de agrietamiento de losas aisladas circulares, elípticas y triangulares”, Ingeniería Investigación y Tecnología, XV(1), 103 – 123. ISSN: 1405-7743.
- [16] Manzanares-Ponce D. (2013). “Edificios estructurados con losas de transferencia”, Tesis de Maestría, Posgrado en Ingeniería Estructural, Universidad Autónoma Metropolitana.
- [17] Mendoza-Díaz A. (2014). “Formulación de modelos de articulaciones en vigas de concreto simple”, Tesis de Maestría, Posgrado en Ingeniería Estructural, Universidad Autónoma Metropolitana.
- [18] Morales-Morales R. (2006). Diseño en Concreto Armado, Fondo editorial ICG.
- [19] Nilson A. (1999). Diseño de Estructuras de Concreto, Mc Graw Hill, Duodécima edición.
- [20] NTCC-04 (2004), Normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto, Reglamento de construcciones del Distrito Federal. Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal.
- [21] Quintas V. (2003). “Two main methods for yield line analysis of slabs”, Journal of Engineering Mechanics, 129(2), 223 – 231.
- [22] Russell C. Hibbeler (2011). Mecánica de Materiales, Pearson, Octava edición.
- [23] Vargas Arguello O.S. (2014). “Diseño, construcción y ensaye ante carga cíclica de un prototipo losa-muro a escala natural”, Tesis de Maestría no concluida, Posgrado en Ingeniería Estructural, Universidad Autónoma Metropolitana.